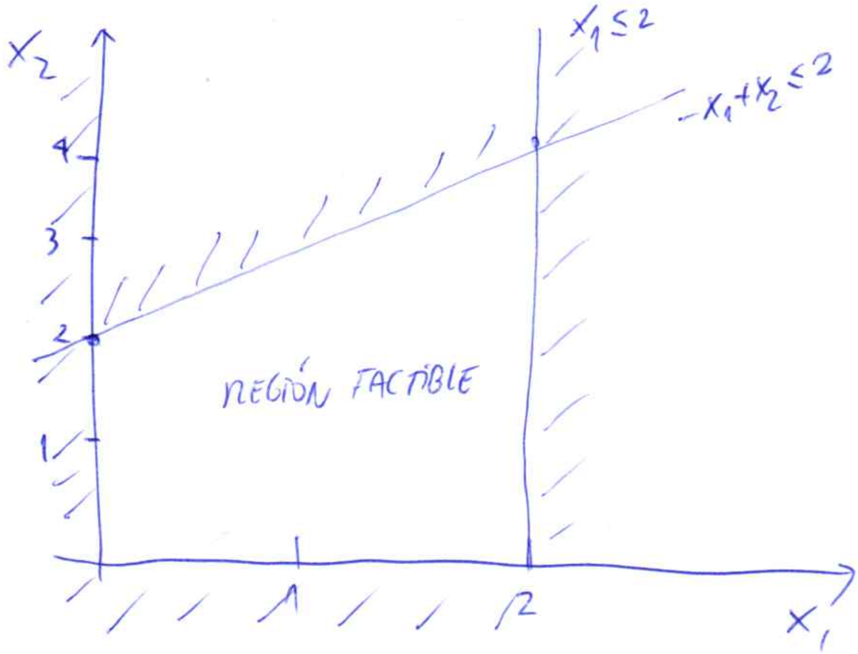
1

$$-x_1 + x_2 \leq 2 \quad \rightarrow \quad x_2 = 2 + x_1$$

$$5x_1 \leq 10 \quad \rightarrow \quad x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Graficar en plano 2-D



b) Se añaden variables de holgura:

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$5x_1 + x_4 = 10$$

LP ESTÁNDAR $(x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0)$

c)
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$5x_1 + x_4 = 10$$

El sistema está en forma canónica con variables básicas: $\{x_3, x_4\}$. Esta es una solución básica $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 10$ (A)

Es factible porque $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$

$\{x_1, x_2\}$ Se efectúan operaciones de pivoteo:
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + \tfrac{1}{5}x_4 = 2$$
$$x_2 + x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 = 4$$
$$x_1 + \tfrac{1}{5}x_4 = 2$$

Es una solución básica $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ y es factible $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (B)

$\{x_2, x_3\}$ del sistema se ve que no es posible por operaciones de pivoteo transformar el sistema a su forma canónica con x_2 y x_3 var. básicas porque están en la misma ecuación y no se encuentran en la otra.

$\therefore$ $\{x_2, x_3\}$ no pueden formar una sol. básica.

$\{x_1, x_4\}$ tomemos el sistema original

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$5x_1 + x_4 = 10$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = -2 \qquad / \cdot (-5) + ec. 2$$
$$5x_1 + x_4 = 10$$

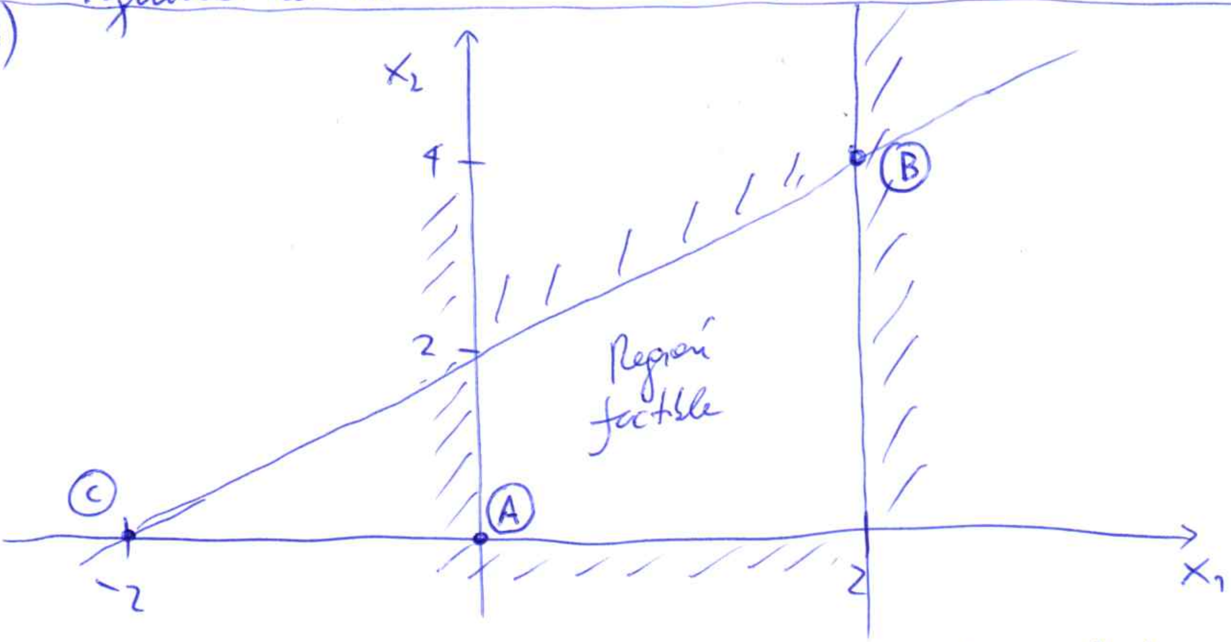
$$x_1 - x_2 - x_3 = -2$$
$$5x_2 + 5x_3 + x_4 = 20$$

Sol. básica: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 20$ y **no** es factible porque $x_1 \le 0$.

C

* $\{x_3\}$ y $\{x_1, x_2, x_4\}$ no pueden formar una solución básica porque esta requiere de m variables básicas $(m=2)$

d)



Las soluciones básicas factibles (A, B) son vértices de la región factible y pueden, entonces, ser soluciones óptimas del problema de optimización.

(2) min. $f = (x+2)^2 + (y-3)^2$

s.a: $g_1 = -5x - y \leq 0$

$g_2 = y - x \geq 0$

a) Condiciones necesarias: $\dfrac{\partial L}{\partial z_i} = 0$ $z = x, y, \sigma_i, u_i$, etc.

L: Lagrangiana)

(Antes hay que escribir las desigualdades como igualdades añadiendo variables de holgura)

g_1: $y + 5x \geq 0$

$y + 5x - \sigma_1^2 = 0$

g_2: $y - x \geq 0$

$y - x - \sigma_2^2 = 0$

$$L = (x+2)^2 + (y-3)^2 - u_1\left(y + 5x - \sigma_1^2\right) - u_2\left(y - x - \sigma_2^2\right)$$

C.N:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2(x+2) - 5u_1 + u_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2(y-3) - u_1 - u_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial u_1} &= y + 5x - \sigma_1^2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial u_2} &= y - x - \sigma_2^2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \sigma_1} &= 2u_1\sigma_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \sigma_2} &= 2u_2\sigma_2 = 0
\end{aligned}\right\}$$

Condiciones necesarias de punto extremo del problema restringido.

b) Todos los casos posibles: si se activan las 2 restricciones, una y la otra no o ninguna.

- Ninguna restricción activa: $\boxed{\begin{matrix} u_1 = 0 & u_2 = 0 \\ \sigma_1 \neq 0 & \sigma_2 \neq 0 \end{matrix}}$

El sistema queda:

$2(x+2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2$

$2(y-3) = 0 \quad \rightarrow \quad y = 3$

$y + 5x - \sigma_1^2 = 0 \qquad \sigma_1 = \sqrt{7}\, i$

$y - x - \sigma_2^2 = 0 \qquad \sigma_2 = \sqrt{5}$

es un punto extremo de f no restringido pero ↓ ⇒ el punto no es factible

- g_1 activa, g_2 no activa: $\boxed{\begin{matrix} u_1 \neq 0 & u_2 = 0 \\ \sigma_1 = 0 & \sigma_2 \neq 0 \end{matrix}}$

$$\left.\begin{aligned} &2(x+2) - 5u_1 = 0 \\ &2(y-3) - u_1 = 0 \\ &y + 5x = 0 \\ &y - x - \sigma_2^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ resolviendo: } \begin{aligned} x &= -0{,}655 \\ y &= 3{,}269 \\ u_1 &= 0{,}538 \\ \sigma_2 &= 1{,}98 \end{aligned} \quad f = 1{,}88 \quad \text{A}$$

- g_1 no activa, g_2 activa $\boxed{\begin{matrix} u_1 = 0 & u_2 \neq 0 \\ \sigma_1 \neq 0 & \sigma_2 = 0 \end{matrix}}$

$$\left.\begin{aligned} &2(x+2) + u_2 = 0 \\ &2(y-3) - u_2 = 0 \\ &y + 5x - \sigma_1^2 = 0 \\ &y - x = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 0{,}5 \\ y &= 0{,}5 \\ u_2 &= -5 \\ \sigma_1 &= \sqrt{3} \end{aligned} \quad f = 12{,}5 \quad \text{B}$$

- Las dos restricciones activas $\quad u_1 \neq 0 \quad u_2 \neq 0$

$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2(x+2) - 5u_1 + u_2 = 0 \\ 2(y-3) - u_1 - u_2 = 0 \\ y + 5x = 0 \\ y - x = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ u_1 = -1/3 \qquad f = 13 \\ u_2 = -5{,}666 \end{array}$$

C

Resumen.

	x	y	f	u_1	u_2	σ_1	σ_2	tipo
A	-0,655	3,269	1,88	0,538	0	0	1,98	tangencia
B	0,5	0,5	12,5	0	-5	$\sqrt{3}$	0	tangencia
C	0	0	13	-1/3	-5,666	0	0	intersección

c) Condiciones suficientes.

punto A. Se activa una restricción $\begin{array}{l} n=2 \\ m=1 \end{array}$ $\quad m<n$. Se debe satisfacer $K = \underline{v}^T \underline{\underline{H}}_x(L_{KT})\underline{v} > 0$ para que sea mínimo.

con $\underline{\underline{J}} \cdot \underline{v} = 0$ con $\underline{\underline{J}} = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x} \quad \frac{\partial g_i}{\partial y} \right]$ $\quad g_i$: restricción activa.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\underline{\underline{H}}_x(L_{KT}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

en el punto A , g_1 está activa.

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} \partial g_1/\partial x \\ \partial g_1/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$5v_1 + v_2 = 0 \quad \therefore v_2 = -5v_1$

entonces:

$$K = \begin{bmatrix} v_1 & -5v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ -5v_1 \end{bmatrix}$$

$K = 52\, v_1^2 > 0 \quad \therefore$ es mínimo.

punto B , g_2 está activa:

$$\nabla g_2 = \begin{pmatrix} \partial g_2/\partial x \\ \partial g_2/\partial y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$-v_1 + v_2 = 0$

$v_2 = v_1$

$$K = \begin{bmatrix} v_1 & v_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$K = 4\, v_1^2 > 0 \quad \therefore$ es mínimo.

punto C . las dos restricciones están activas $n = m$ entonces basta que $u_1, u_2 > 0$ para que sea mínimo. Pero, en este caso $u_1 < 0$, $u_2 < 0$ entonces es <u>un máximo</u>.

Entonces, A y B son mínimos, el mínimo global es A porque el valor de f es menor ($f = 1{,}88$)

d) $g_1 = \underline{y + 5x \geq 0}$ $(-5x - y \leq 0)$

Cambia a: $\underline{y + 5x + 1 \geq 0}$ $(-5x - y \leq 1)$

Entonces, nuestro desarrollo es: $g \geq 0$

Cambio a $g - \xi \geq 0$

con $\xi = -1$

Se puede estimar el valor del mínimo con el cambio de la resticción g_1

$$\frac{\Delta f}{\Delta \xi} = u_j$$

$$f \cong f_0 + u_1 \Delta \xi_1$$

$f \simeq 1{,}88 + 0{,}538(-1) = 1{,}342$ → este es el nuevo mínimo si ocurre la modificación en g_1 (estimado, hay que calcular de nuevo para saber exactamente la ubicación y valor de f en el nuevo caso)

e) Un cambio en g_2 no afecta al mínimo global, porque el mínimo global activo g_1, no g_2.

③ $\max \quad f = 100 - 8x_1^2 - 3(x_2-3)^2$

$s.a: \quad 0 \leq x_1 \leq 2$

$\quad\quad\; 0 \leq x_2 \leq 2$

a) $\phi = f - \mu \sum_i q_i(\underline{x})$

esta es la función de maximización aplicando las funciones de barrera. Ahora el problema es no restringido.

Las funciones de barrera hay que definirlas para todas las restricciones:

$x_1 \geq 0$

$x_1 \leq 2$

$x_2 \geq 0$

$x_2 \leq 2$

entonces:

$$\underline{\text{MÁX}} \quad \phi = 100 - 8x_1^2 - 3(x_2-3)^2 - \mu\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{2-x_2}\right]$$

$$\text{ó } \underline{\text{MÍN}} \quad \phi = -100 + 8x_1^2 + 3(x_2-3)^2 + \mu\left[\quad \text{idem} \quad\right]$$

o logarítmicas

$$\text{Mín} \quad \phi = -100 + 8x_1^2 + 3(x_2-3)^2 + \mu\left[-\ln x_1 - \ln(2-x_1) - \ln x_2 - \ln(2-x_2)\right]$$

b) Sucesión de optimizaciones no restringidas :

1. Dado $\underline{X}^0$ DENTRO DE LA REGIÓN FACTIBLE

2. Dado $\mu = 100$ (valor grande de μ)

3. Minimizar ϕ usando un método para f no restringidas (Powell p.

4. Disminuir μ. por ejemplo $\mu = \mu \cdot \beta$ $\beta = 0,5$

5. Minimizar ϕ usando como punto inicial la solución de la iteración anterior. ir al paso 4. y terminar cuando $\Delta \underline{X} < \varepsilon$

c)

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_1} = +16 X_1 - \frac{\mu}{X_1} + \frac{\mu}{2 - X_1} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial X_2} = +6(X_2 - 3) - \frac{\mu}{X_2} + \frac{\mu}{2 - X_2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1^2} = +16 + \frac{\mu}{X_1^2} + \frac{\mu}{(2 - X_1)^2} \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_2 \partial X_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X_2^2} = +6 + \frac{\mu}{X_2^2} + \frac{\mu}{(2 - X_2)^2}$$

punto inicial $\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (dentro de la región factible) $(\mu = 1)$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \nabla \phi = \begin{bmatrix} 16 \\ -12 \end{bmatrix}$$

método de Newton $\underline{\underline{H}}\,\underline{\Delta x} = -\nabla f$

$x^{k+1} = x^k + \underline{s}$

$\underline{s} = -\underline{\underline{H}}^{-1}\nabla f$

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$18\,\Delta x_1 = -16 \qquad \Delta x_1 = -0{,}888$

$8\,\Delta x_2 = 12 \qquad \Delta x_2 = 1{,}5$

$x_1^1 = x_1^0 + \Delta x_1 = 1 - 0{,}888 = 0{,}11$

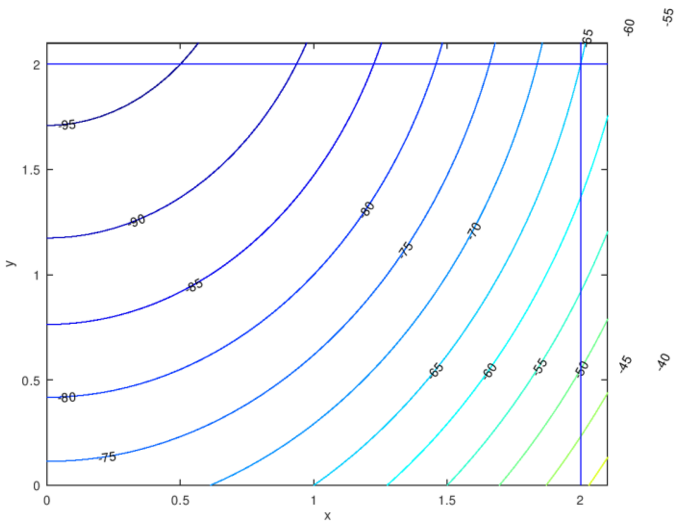
$x_2^1 = x_2^0 + \Delta x_2 = 1 + 1{,}5 = 2{,}5$

$$\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 0{,}11 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

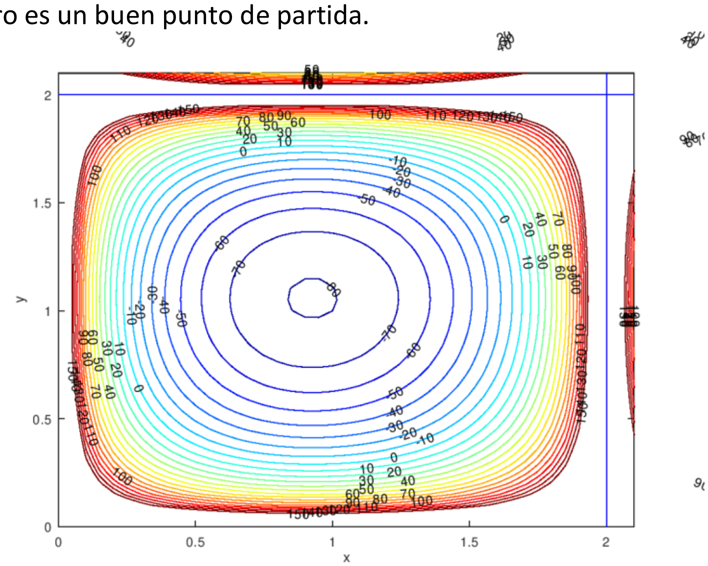
este punto está fuera de la región factible! La función ϕ debería partir con valores μ mayores para evitar estos problemas (ej: $\mu = 100$)

El método de Newton convencional no es adecuado porque puede sobreestimar el avance necesario para minimizar.

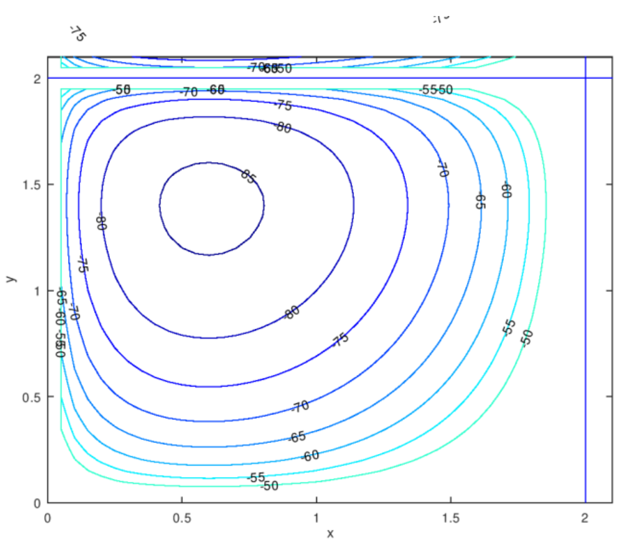
Problema original.
Nótese el mínimo alrededor de $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.



Función de barrera con μ = 100.
El mínimo del problema no restringido está lejos del original, pero es un buen punto de partida.



Función de barrera con μ = 10.



Función de barrera con μ = 1.
El mínimo está cerca del original. La función tiene una curvatura menos regular.