Optimización de Procesos 540.258
2020-1

Certamen 1

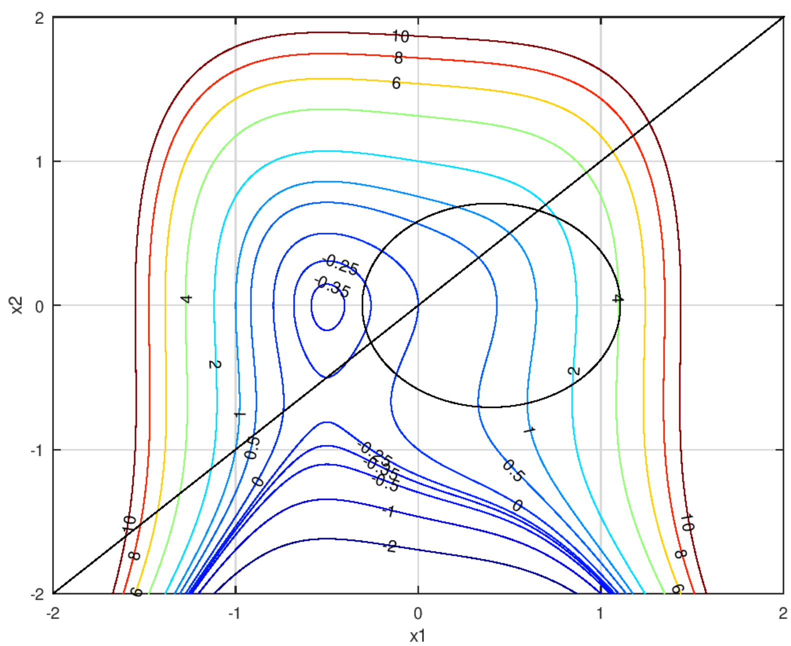
1. (4 ptos.) Se tiene el siguiente problema de optimización:

Minimizar $f = 2{x_1}^4 + {x_2}^3 + {x_2}^2 + x_1$

Sujeto a: $g_1 = (x_1 - 0.4)^2 + x_2^2 \leq 0.5$

$g_2 = x_1 - x_2 \geq 0$

Algunos contornos de la función objetivo, así como las restricciones, se muestran en el siguiente gráfico:



Parte I (1.5 ptos.): Problema restringido

a) Muestre en el gráfico la región factible.
b) Determine gráficamente, de manera aproximada, el mínimo global (si existe) del problema.
c) ¿La región factible es convexa? Determínelo analíticamente y compare con la información gráfica.

Parte II (2.5 ptos.): El problema se modifica de manera que no existen restricciones.

d) Determine analíticamente y clasifique, en base a las condiciones suficientes para funciones no restringidas, los puntos estacionarios de f(x).
e) Se quiere minimizar direccionalmente la función. Se comienza del punto $\underline{x}^0 = [-2 \quad 0]$ en la dirección $\underline{s} = [1 \quad 0]$. Parametrice la función.
f) Efectúe 2 iteraciones con el método de Newton (Puede utilizar, si lo desea, un software donde esté implementado el algoritmo. Indicar de todas maneras los valores de la función y la variable en cada iteración). Utilice el origen como valor inicial.
g) Determine el punto en el espacio (x_1, x_2) que corresponde al avance del método de Newton hacia el mínimo direccional luego de 2 iteraciones.

2. (2 ptos.) Se requiere encontrar el costo mínimo de instalación y operación de una tubería que transporta agua. El costo tiene dos componentes, por un lado el costo de instalación anualizado que tiene la siguiente funcionalidad:

$$C_{inst.}\left(\frac{M\$}{año}\right) = k_1 D^{1.5} L$$

Con D el diámetro de la tubería [m], L el largo de ésta [m] y k_1 = 1 [u.a.].
Por otro lado, los costos de operación están relacionados con la energía gastada en impulsar el fluido, que puede ser descrito por la siguiente ecuación:

$$C_{oper.}\left(\frac{M\$}{año}\right) = k_2\ Q\ \left(f\frac{L}{D}\rho v^2\right)$$

Con Q el caudal [m^3/s], f el factor de fricción de Fanning, ρ la densidad del fluido [kg/m^3], *v* la velocidad [m/s] y k_2 = 1 [u.a.]

Se pueden considerar los siguientes datos:
Flujo volumétrico: 0.001 m^3/s
Largo de la tubería: 100 m
Factor de fricción: 0.002

a) Determine analíticamente el costo mínimo.
b) Determine la sensibilidad relativa del costo mínimo con respecto al caudal (Q) y con respecto al costo de la electricidad (k_2). Discuta el resultado.

AKB/akb 27-05-2020

Certamen 1 Optimización de Procesos (V1)

1)

$$f = 2x_1^4 + x_2^3 + x_2^2 + x_1$$

$$g_1 = (x_1 - 0{,}4)^2 + x_2^2 \leq 0{,}5$$

$$g_2 = x_1 - x_2 \geq 0$$

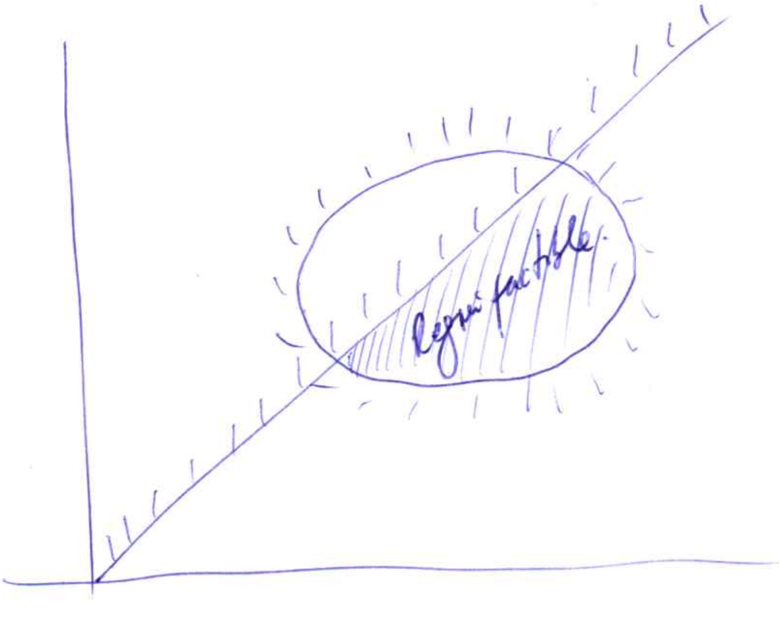
(I)

a) tomemos por ejemplo $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$g_1 = (0 - 0{,}4)^2 + 1^2 = 1{,}16 \not\leq 0{,}5 \Rightarrow$ este punto está fuera de la región factible def. por g_1

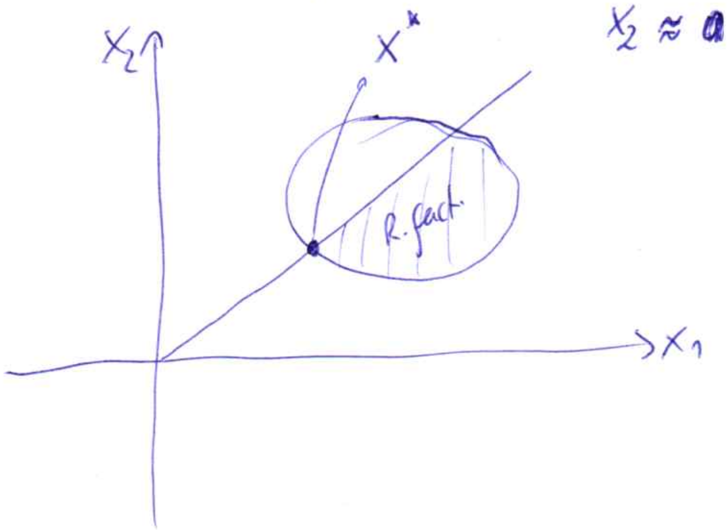
$g_2 = 0 - 1 \not\geq 0$ este punto está fuera de la región factible definida por g_2.

Entonces, la región factible es:



b) Dentro de la región factible, el punto que tiene un valor mínimo de la $f(x)$ es: $x_1 \approx -1/3$

$x_2 \approx -1/3$



c) Para que la Región factible sea convexa, las restricciones (≤ 0) deben ser funciones convexas:

g_1:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 2(x_1 - 0{,}4) \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 2x_2$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial g_1}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\underline{\underline{H}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$(2-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 2$$

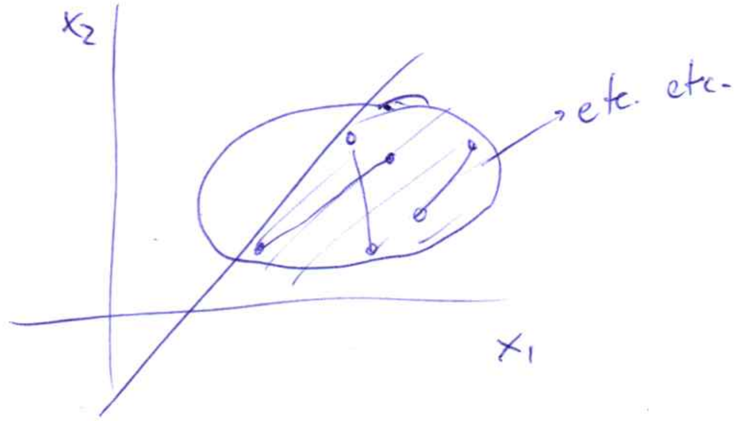
valores propios > 0, $\underline{H}$ def. positiva

la función es convexa.

g_2: es convexa porque es función lineal.

Luego, las funciones forman una región convexa.

Gráficamente, se observa que la región es convexa, porque, dados cualquier par de puntos en la región, la recta que los une se encuentra enteramente en la región.



(II)

d) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 8x_1^3 + 1$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2 + 2x_2$

$\nabla f = 0$ es cond. necesaria de punto estacionario.

$8x_1^3 + 1 = 0 \rightarrow x_1 = \left(\frac{-1}{8}\right)^{1/3} = -0{,}5$

$3x_2^2 + 2x_2 = 0 \longrightarrow x_2(3x_2 + 2) = 0$

puntos estacionarios $\begin{cases} x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -0{,}5 \\ x_2 = -2/3 \rightarrow x_1 = -0{,}5 \end{cases}$

Para clarificarlos hay que usar las cond. suficientes.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 24 x_1^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_2 + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 24x_1^2 & 0 \\ 0 & 6x_2+2 \end{bmatrix}$$

para punto $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(6-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$ valores propios positivos $\rightarrow$ $\underline{\underline{H}}$ def. positiva.

$x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0$ $\rightarrow$ MÍNIMO.

punto: $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = -2/3$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$(6-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$ valores propios > 0 y < 0

$\underline{\underline{H}}$ indefinida

$x_1 = -0{,}5$, $x_2 = -2/3$ punto de silla.

e) $\underline{X} = \underline{X}^0 + \lambda \underline{S}$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -2 + \lambda$
$x_2 = 0$

$$f(\lambda) = 2(\lambda-2)^4 + (\lambda - 2)$$

$$\frac{df}{d\lambda} = 8(\lambda-2)^3 + 1$$

$$\frac{d^2f}{d\lambda^2} = 24(\lambda-2)^2$$

método de Newton: $\lambda^{i+1} = \lambda^i - \dfrac{f'(\lambda^i)}{f''(\lambda^i)}$

- $\lambda^0 = 0$

$$\lambda^1 = 0 - \frac{-63}{96}$$

- $\lambda^1 = 0,656$

$$\lambda^2 = 0,656 - \frac{-18,42}{43,352}$$

- $\lambda^2 = 1,081$ → avance del método de Newton.

g) $x_1 = -2 + 1,081 = -0,919$
$x_2 = 0$

→ este es el punto en el que está el método de Newton luego de las dos iteraciones.

2)

a) 1 pto.

b) 1 pto.

(discusión: 0,3 ptos)

a) Costo mínimo

$$C = C_{op.} + C_{inst.}$$

$$C = k_1 D^{1,5} L + k_2 Q \left(f \frac{L}{D} \rho v^2 \right)$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\therefore C = k_1 D^{1,5} L + k_2 Q^3 f L \rho \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{D^5}$$

$$\frac{dC}{dD} = 1,5 k_1 \cancel{L} D^{0,5} - 5 k_2 Q^3 f \cancel{L} \rho \frac{16}{\pi^2} \cdot D^{-6} = 0$$

$$D^{*6,5} = \frac{5 k_2 Q^3 f \rho \frac{16}{\pi^2}}{1,5 k_1}$$

$$D^{*6,5} = 5,404 \frac{k_2}{k_1} \cdot Q^3 f \rho$$

$$D^* = \left(5,404 \frac{k_2}{k_1} Q^3 f \rho \right)^{\frac{1}{6,5}}$$

$$D^* = \left(5,404 \cdot \frac{1}{1} \cdot 0,001^3 \cdot 0,002 \cdot 1000 \right)^{\frac{1}{6,5}}$$

$$D^* = 0,0595 \text{ m}$$

$$C^* = k_1 D^{*1,5} L + k_2 Q^3 f L \rho \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{D^{*5}}$$

$$C^* = 1 \cdot 0{,}0595^{1,5} \cdot 100 + 1 \cdot 0{,}001^3 \cdot 0{,}002 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{0{,}0595^5}$$

$$C^* = 1{,}4514 + 0{,}4348$$

$$C^* = 1{,}886 \ \mathrm{M\$/Año}$$

$$\frac{d^2C}{dD^2} = 0{,}75\, k L D^{-0,5} + 30\, k_2 Q^3 f L \rho \frac{16}{\pi^2} \cdot D^{-7} > 0 \quad \text{(es mínimo)}$$

b) • $$S^C_Q = \frac{Q}{C} \frac{\partial C}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = 3\, k_2 Q^2 f L \rho \frac{4^2}{\pi^2} \frac{1}{D^5}$$

$$S^C_Q = \frac{0{,}001}{1{,}886} \cdot \left[3 \cdot 1 \cdot 0{,}001^2 \cdot 0{,}002 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(0{,}0595)^5}\right]$$

$$\boxed{S^C_Q = 0{,}69}$$

Discusión

La sensibilidad relativa del costo óptimo con respecto al caudal es mayor, por lo que éste influye en mayor medida que el costo de la electricidad a la hora de optimizar el diseño

• $$S^C_{k_2} = \frac{k_2}{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial k_2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial k_2} = Q^3 f L \rho \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{D^5}$$

$$S^C_{k_2} = \frac{1}{1{,}886} \cdot 0{,}001^3 \cdot 0{,}002 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot \frac{16}{\pi^2 (0{,}0595)^5}$$

$$\boxed{S^C_{k_2} = 0{,}23}$$