Optimización de Procesos 540.258
2022-1

EXAMEN

PAUTA

1. (2 ptos.) Una refinería de petróleo dispone de dos crudos que entregan diferentes rendimientos de gasolina, kerosene y fuel oil. Además, las condiciones de equipamiento y almacenamiento de la planta imponen limitaciones a la producción de cada componente, lo que también se muestra en la tabla. La utilidad entregada por el procesamiento del crudo #1 es 1.00 USD/bbl y la del crudo #2 es de 0.70 USD/bbl.

	Rendimiento de cada producto (%)		Producción máxima permitida (bbl/día)
	Crudo #1	Crudo #2	
Gasolina	70	31	6000
Kerosene	6	9	2400
Fuel Oil	24	60	12000

a) Plantee el problema de optimización que permite maximizar la utilidad. Defina función objetivo, restricciones, variables de decisión y grados de libertad. 0,5
b) Utilice la metodología simplex para resolver el problema. 1,0
c) Analice la sensibilidad del óptimo encontrado ante los siguientes cambios: i) la capacidad de producción de gasolina se aumenta a 6100 bbl/día. ii) La capacidad de producción de kerosene se aumenta a 2500. Realice el análisis de sensibilidad utilizando los multiplicadores de Lagrange, note que las restricciones de no negatividad de variables deben ser explícitas en el Lagrangiano, al contrario de Simplex. 0,5

2. (2 ptos.) Minimice la siguiente función utilizando el método del gradiente:

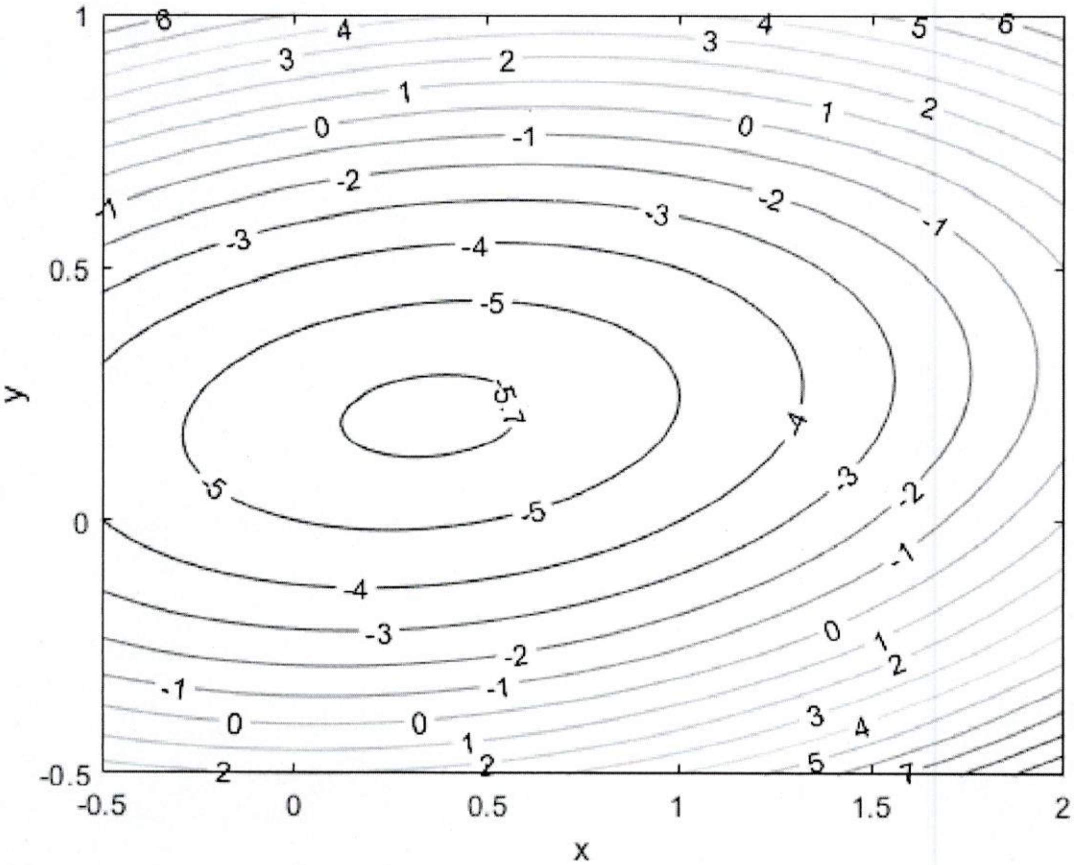
$$f = 2x^2 + 16y^2 - 2xy - x - 6y - 5$$

Punto inicial: x = 1.5, y = 0.

Efectúe 3 minimizaciones direccionales exactas para esta función cuadrática y grafique el avance en la figura adjunta. Discuta los resultados.

- usa correctamente el método 1,5

- gráfico: 0,5



3. (2 ptos.) Se tiene el siguiente problema de optimización

Minimizar: $Z = x_1^2 + 2x_2^2$
Sujeto a: $x_1^2 + x_2^2 \leq 5$
$2x_1 - 2x_2 = 1$

a) Determine mediante el formalismo de Lagrange el o los puntos estacionarios de tangencia del problema. 0,7
b) Clasifique el o los puntos estacionarios encontrados en la parte a. 0,7
c) Determine si el problema de optimización es convexo y discuta en función de los resultados del punto b. 0,6

AKB/akb 13-07-2022

EXAMEN 2022

1-

Variables de decisión: X_1: crudo #1 $\left[\frac{bbl}{día}\right]$

X_2: crudo #2 $\left[\frac{bbl}{día}\right]$

Producción máxima permitida

Gasolina $0{,}7\,X_1 + 0{,}31\,X_2 \leq 6000 \left(\frac{bbl}{día}\right)$

Kerosene $0{,}06\,X_1 + 0{,}09\,X_2 \leq 2400$ "

Fuel Oil $0{,}24\,X_1 + 0{,}60\,X_2 \leq 12000$ "

función objetivo:

Maximizar $U = 1 \cdot X_1 + 0{,}7\,X_2$

$\left(\frac{USD}{DÍA}\right) \quad \frac{USD}{bbl} \quad \frac{bbl}{día}$

Además $X_1 \geq 0$
$X_2 \geq 0$

Este problema lineal tiene 2 g.l. (2 var. − 0 ecs.)

b) Formateo Simplex. Se añaden variables de holgura a las restricciones y la f.o. es de minimización $f = -U$

$$
\begin{array}{lr}
0{,}7\,x_1 + 0{,}31\,x_2 + x_3 = 6000 & 8571 \text{ min} \\
0{,}06\,x_1 + 0{,}09\,x_2 + x_4 = 2400 & 40000 \\
0{,}24\,x_1 + 0{,}60\,x_2 + x_5 = 12000 & 50000 \\
-f \underbrace{- x_1}_{\min c_j} - 0{,}7\,x_2 = 0 &
\end{array}
$$

b/a

El sistema está en forma canónica con var. básicas x_3, x_4 y x_5. No básicas: x_1 y x_2

$$
\begin{array}{ll}
E_1 & x_1 + 0{,}443\,x_2 + 1{,}428\,x_3 = 8571 \\
E_2 & 0{,}06\,x_1 + 0{,}09\,x_2 + x_4 = 2400 \\
E_3 & 0{,}24\,x_1 + 0{,}60\,x_2 + x_5 = 12000 \\
E_4 & -f - x_1 - 0{,}7\,x_2 = 0
\end{array}
$$

b/a

$$
\begin{array}{llr}
E_1: & x_1 + 0{,}443\,x_2 + 1{,}429\,x_3 = 8571 & 19347 \text{ min} \\
-0{,}06E_1 + E_2: & +0{,}0634\,x_2 - 0{,}0857\,x_3 + x_4 = 1886 & 29748 \\
-0{,}24E_1 + E_3: & +0{,}494\,x_2 - 0{,}343\,x_3 + x_5 = 9943 & 20128 \\
E_1 + E_4: -f & \overbrace{-0{,}257\,x_2}^{\min c_j} + 1{,}429\,x_3 = 8571 &
\end{array}
$$

E_1: $2{,}257\,x_1 + x_2 + 3{,}226\,x_3 = 19347$

E_2: $0{,}0634\,x_2 - 0{,}0857\,x_3 + x_4 = 1886$

E_3: $0{,}494\,x_2 - 0{,}343\,x_3 + x_5 = 9943$

E_4 $-f$ $-0{,}257\,x_2 + 1{,}429\,x_3 = 8571$

E_1: $2{,}257\,x_1 + x_2 + 3{,}226\,x_3 = 19347$

$-0{,}0634\,E_1 + E_2$: $-0{,}143\,x_1 - 0{,}29\,x_3 + x_4 = 659{,}4$

$-0{,}494\,E_1 + E_3$: $-1{,}11\,x_1 - 1{,}937\,x_3 + x_5 = 385{,}6$

$0{,}257\,E_1 + E_4$ $-f + \underbrace{0{,}573\,x_1}_{\varsigma>0} + \underbrace{2{,}258\,x_3}_{\varsigma>0} = 13543$

Esta es la solución óptima del problema:

$x_1 = 0$ $\frac{bbl}{día}$ de crudo # 1

$x_2 = 19347$ $\frac{bbl}{día}$ de crudo # 2

$U = -f = 13543 \left[\frac{USD}{día}\right]$

c) Sensibilidad. Hay que escribir la Lagrangiana del problema restringido → Sólo para las restricciones activas, ya que estudiaremos el punto de mínimo encontrado.

Gasolina: $0{,}7 \cdot 0 + 0{,}31 \cdot 19347 = 5998 \leq 6000$ ACTIVA

Keroseno: $0{,}06 \cdot 0 + 0{,}09 \cdot 19347 = 1741 \leq 2400$ NO ACTIVA

fuel oil: $0{,}24 \cdot 0 + 0{,}60 \cdot 19347 = 11608 \leq 12000$ NO ACTIVA

Además, las restricciones de no negatividad.

$x_1 \geq 0 \qquad x_1 = 0$ ACTIVA

$x_2 \geq 0 \qquad x_2 = 19347$ NO ACTIVA

El Lagrangiano es:

$$L = f + \sum w_i h_i - \sum u_i g_i$$

$g_1 = 6000 - 0{,}7x_1 - 0{,}31x_2$

$g_4 = x_1$

* Restricciones escritas como $g_i \geq 0$

En este caso:

$$L = -x_1 - 0{,}7x_2 - u_1\left[6000 - 0{,}7x_1 - 0{,}31x_2\right] - u_4 x_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + 0{,}7u_1 - u_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -0{,}7 + 0{,}31u_1 = 0 \quad \sim \quad u_1 = 2{,}26$$

$u_4 = 0{,}582$

i) Capac. de producción de gasolina se aumenta a 6100 $\frac{bbl}{día}$

$$g \geq 0 \qquad g_1 = 6000 - 0{,}7X_1 - 0{,}31X_2$$

$$\downarrow$$

$$g - \xi \geq 0$$

En este caso $\xi = -100$

Entonces: $\frac{\Delta f}{\Delta \xi_i} = u_i \qquad f \cong f_0 + u_i \Delta \xi_i$

$$f \approx -13543 + 2{,}26(-100)$$

$$f \approx -13769 \quad (U = 13769)$$

La utilidad aumenta a 13769 $\frac{USD}{DÍA}$.

ii) Capac. de prod. de kerosene se aumenta a 2500 $\frac{bbl}{día}$

No tiene efecto en el óptimo. Porque, dado que esa restricción no está activa, su correspondiente u_i es cero.

2.

$$f = 2x^2 + 16y^2 - 2xy - x - 6y - 5$$

$$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad f(\underline{x}^0) = -2$$

Método del gradiente: $\underline{x}^{i+1} = \underline{x}^i + t^i \underline{s}^i$ con $\underline{s}^i = -\nabla f(\underline{x}^i)$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - 2y - 1 \\[2ex] 32y - 2x - 6 \end{bmatrix}$$

Para las minimizaciones direccionales exactas se puede usar

$$t = \frac{-\nabla^T f(\underline{x}) \, \underline{s}}{\underline{s}^T \underline{\underline{H}} \, \underline{s}}$$ (porque esto es exacto para una función cuadrática)

Entonces, hay que calcular $\underline{\underline{H}}$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} \partial^2 f / \partial x_1^2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 32 \end{bmatrix}$$

iteración 1: Cómputo de gradiente $\nabla f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{s}^0 = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$t^0 = \frac{(-5 \;\; 9)\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}}{(-5 \;\; 9)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}} = \frac{106}{(-38 \;\; 298)\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}} = \frac{106}{2872} = 0{,}0369$$

$$\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}0369 \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3155 \\ 0{,}3321 \end{pmatrix} \qquad f(\underline{x}^1) = -3{,}96$$

iteración 2:

$$Df(\underline{x}^1) = \begin{pmatrix} 3{,}598 \\ 1{,}9962 \end{pmatrix} \qquad \underline{s}^1 = \begin{pmatrix} -3{,}598 \\ -1{,}9962 \end{pmatrix}$$

$$t^1 = \frac{(-3{,}598 \;\; -1{,}9962)\begin{pmatrix} -3{,}598 \\ -1{,}9962 \end{pmatrix}}{(-3{,}598 \;\; -1{,}9962)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3{,}598 \\ -1{,}9962 \end{pmatrix}} = \frac{16{,}93}{(-10{,}4 \;\; -56{,}7)\begin{pmatrix} -3{,}598 \\ -1{,}9962 \end{pmatrix}} = \frac{16{,}93}{150{,}6}$$

$$t^1 = 0{,}112$$

$$\underline{x}^2 = \begin{pmatrix} 1{,}3155 \\ 0{,}3321 \end{pmatrix} + 0{,}112 \begin{pmatrix} -3{,}598 \\ -1{,}9962 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9125 \\ 0{,}1085 \end{pmatrix} \qquad f(\underline{x}^2) = -4{,}90$$

iteración 3:

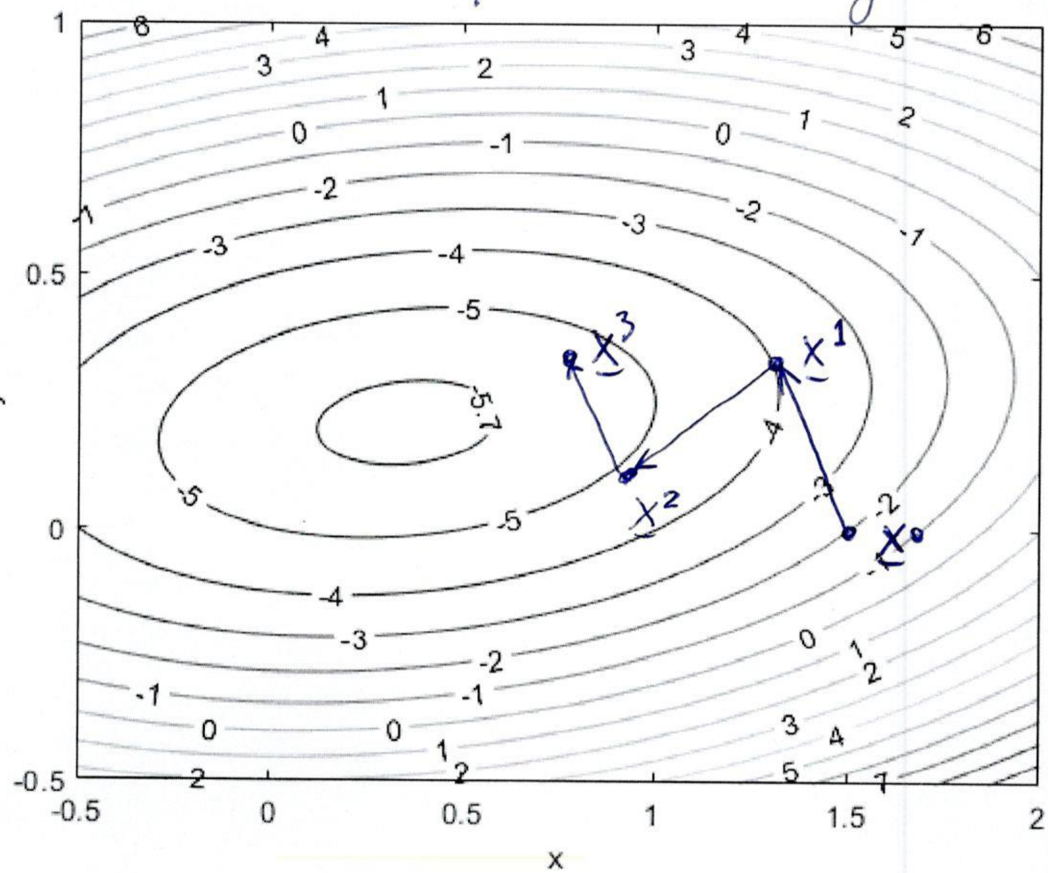
$$Df(\underline{x}^2) = \begin{pmatrix} 2{,}433 \\ -4{,}353 \end{pmatrix} \qquad \underline{s}^2 = \begin{pmatrix} -2{,}433 \\ 4{,}353 \end{pmatrix}$$

$$t^2 = \frac{(-2{,}433 \;\; 4{,}353)\begin{pmatrix} -2{,}433 \\ 4{,}353 \end{pmatrix}}{(-2{,}433 \;\; 4{,}353)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2{,}433 \\ 4{,}353 \end{pmatrix}} = \frac{24{,}87}{(-18{,}44 \;\; 144{,}16)\begin{pmatrix} -2{,}433 \\ 4{,}353 \end{pmatrix}} = \frac{24{,}87}{672{,}4}$$

$$t^2 = 0{,}037$$

$$\underline{x}^3 = \begin{pmatrix} 0{,}9125 \\ 0{,}1085 \end{pmatrix} + 0{,}037 \begin{pmatrix} -2{,}433 \\ 4{,}353 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}822 \\ \cancel{4{,}33} \\ 0{,}269 \end{pmatrix} \qquad f(\underline{x}^3) = -5{,}37$$

CAMINO ZIG-ZAG típico del método del gradiente. Las direcciones sucesivas son ortogonales



3. (2 ptos.) Se tiene el siguiente problema de optimización

Minimizar: $Z = x_1^2 + 2x_2^2$

Sujeto a: $x_1^2 + x_2^2 \leq 5$

$2x_1 - 2x_2 = 1$

a) Determine mediante el formalismo de Lagrange el o los puntos estacionarios de tangencia del problema. 0,7

b) Clasifique el o los puntos estacionarios encontrados en la parte a. 0,7

c) Determine si el problema de optimización es convexo y discuta en función de los resultados del punto b. 0,6

A B/akb 13-07-2022

3.

$$\min\ Z = x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\text{S.a:}\quad x_1^2 + x_2^2 \leq 5$$

$$2x_1 - 2x_2 = 1$$

En formato de Lagrange:

$$\min\ Z = x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\text{S.a:}\quad g = 5 - x_1^2 - x_2^2 - \sigma^2 = 0$$

$$h = 2x_1 - 2x_2 - 1 = 0$$

Lagrangiana:

$$L = x_1^2 + 2x_2^2 - u(5 - x_1^2 - x_2^2 - \sigma^2) + w(2x_1 - 2x_2 - 1)$$

* Se necesitan calcular el o los puntos de tangencia. Estos involucran una sola restricción. En este caso, la restricción h está siempre activa, por lo tanto, un punto estacionario que involucre g y h será de intersección. Además, no puede existir un punto estacionario que involucre sólo a g. (h siempre activa)

Entonces, la Lagrangiana se reduce a:

$$L = x_1^2 + 2x_2^2 + w(2x_1 - 2x_2 - 1)$$

u no está activa $(u = 0)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2w = 0$$

$$\rightarrow \quad 2x_1 + 4x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - 2w = 0$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{1 + 2x_2}{2}$$

$$1 + 2x_2 + 4x_2 = 0$$

$$6x_2 = -1 \quad x_2 = -1/6$$

$$x_1 = \frac{1 + 2(-1/6)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$w = 2x_2 = -\frac{1}{3}$$

El punto estacionario es: $x_1^* = 1/3$, $x_2^* = -1/6$, $w^* = -1/3$ $\quad f^* = 0{,}167$

b) Para clasificar este punto (dado que $n > m$) se debe estudiar la curvatura K

$$K = \underline{v}^T \underline{\underline{H}}(L_{KT})\, \underline{v}$$

$$\text{con} \quad \underline{\underline{J}}\, \underline{v} = 0$$

$$\underline{\underline{J}} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \right] = \left[2 \quad -2 \right]$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2v_1 - 2v_2 = 0 \rightarrow v_1 = v_2$$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ vector ortogonal al gradiente de la restricción.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\underline{\underline{H}}(L_{KT}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 2v_1 & 4v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$K = 2v_1^2 + 4v_1^2 = 6v_1^2 > 0$ entonces el punto es efectivamente un mínimo.

c) Para saber si el problema es convexo Z debe ser convexa y $g \geq 0$ debe ser cóncava. Además, dado que $h = 0$ es lineal, solo basta estudiar las dos primeras condiciones.

$$z = x_1^2 + 2x_2^2$$

$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 2$

$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 4x_2$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 4$

$\underline{\underline{H}}_z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$

$\underline{\underline{H}}$ def positiva $\therefore z$ es convexa

$$g = 5 - x_1^2 - x_2^2$$

$\frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = -2$

$\frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = -2$

$\underline{\underline{H}}_g = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$

$\underline{\underline{H}}_g$ es def negativa $\therefore g$ es cóncava

Debido a esto, el problema es convexo.

Entonces, el mínimo encontrado corresponde al <u>mínimo global</u>