Optimización de Procesos 540.258
2019-1

Certamen 1

PAUTA

1. (3 ptos.) Se tiene el siguiente problema de optimización:

Minimizar $f = x_1 + x_2$
Sujeto a: $g_1 = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \geq 2$
$g_2 = x_1^2 + x_2^2 \leq 9$
$g_3 = x_1 \geq 0$
$g_4 = x_2 \geq 0$

a) Determine si el problema de optimización es convexo.

Para saber si el problema de optimización es convexo, se debe estudiar la convexidad de la función y las restricciones. Si se escribe el problema de la siguiente manera:

Minimizar $f = x_1 + x_2$
Sujeto a: $g_1 = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 + 2 \leq 0$
$g_2 = x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0$

Escritas como $g_i \leq 0$, <u>todas las restricciones</u> deben ser funciones convexas para que la región lo sea. Las restricciones g_3 y g_4 son convexas y cóncavas por ser rectas.
Siguiendo el mismo argumento, f es convexa y cóncava ya que es también una recta.

g_1:

$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = -2(x_1 - 1), \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = -2x_2$
$\frac{\partial^2 g_1}{\partial {x_1}^2} = -2, \frac{\partial^2 g_1}{\partial {x_2}^2} = -2, \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 x_2} = 0$
$H(g_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
Valores propios: $\left| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$
$(-2 - \lambda)^2 = 0$
$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$
Los valores propios son todos menores que cero, luego g_1 es estrictamente cóncava.

g_2.
$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 2x_1, \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 2x_2$
$\frac{\partial^2 g_2}{\partial {x_1}^2} = 2, \frac{\partial^2 g_2}{\partial {x_2}^2} = 2, \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 x_2} = 0$
$H(g_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Valores propios: $\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$
$(2 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$
$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 2$
Los valores propios son todos mayores que cero, luego g_2 es estrictamente convexa

La región delimitada por las restricciones del problema no es convexa. Por lo tanto, el problema de optimización no es convexo. Esto quiere decir que no se puede garantizar que dado un mínimo del problema este sea global.

b) Grafique las restricciones e indique la región factible.
c) Grafique los siguientes contornos de la función objetivo: $f = 0, f = 2\ y\ f = 4$.

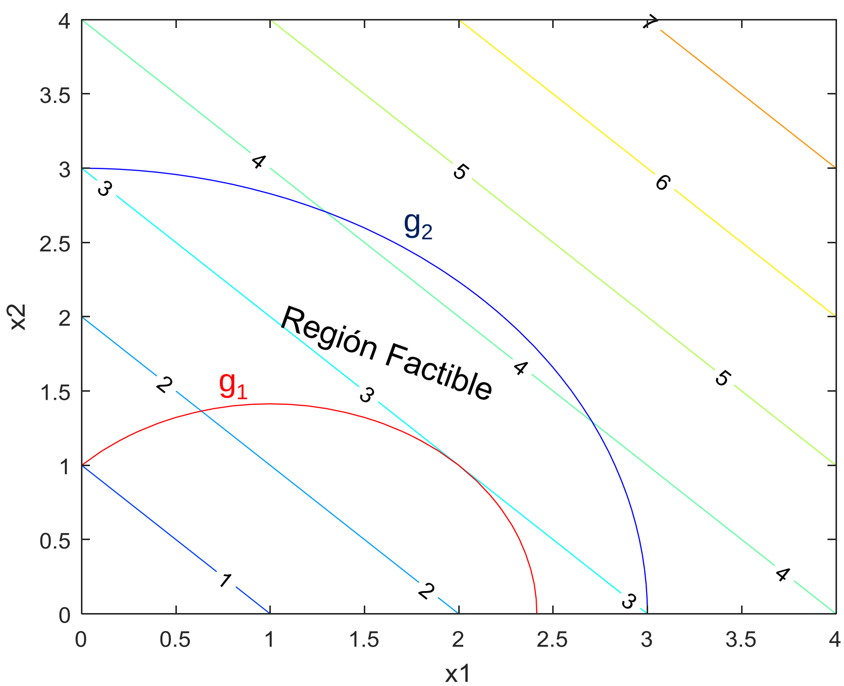
Las restricciones g_3 y g_4 definen al primer cuadrante del plano cartesiano. La restricción g_2 corresponde a un círculo con centro en el origen y radio = 3. La restricción g_1 corresponde a un círculo con radio $\sqrt{2}$ centrado en $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. La región factible se ubica entre los dos círculos, según se desprende de los signos de las desigualdades.

Para graficar los contornos se fija el valor de f. Por ejemplo para f = 2:

$$2 = x_1 + x_2$$

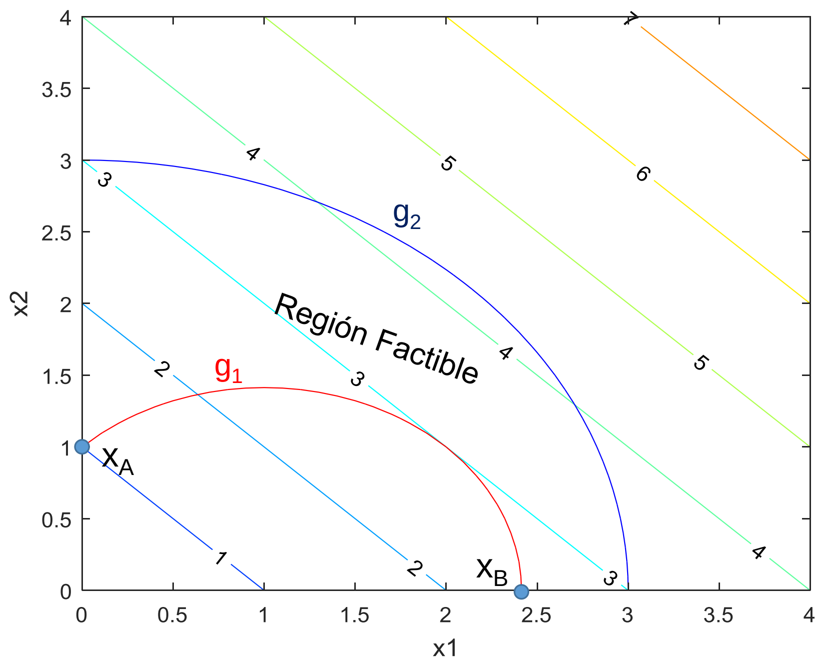
Entonces se grafica la recta

$$x_2 = 2 - x_1$$



d) Indique en el gráfico la ubicación de al menos dos mínimos del problema.

De la figura se observa que hay dos mínimos del problema en las intersecciones de la restricción g_1 con las restricciones dadas por los ejes coordenados: puntos x_A y x_B en la figura siguiente. Se puede observar que no hay puntos dentro de la región factible, en la vecindad de esos puntos, que tengan valores menores de la función objetivo. Por lo tanto, corresponden a mínimos del problema.
El mínimo global es x_A, que se ubica sobre el contorno f = 1.



e) Determine matemáticamente el mínimo global.

Se observa que el mínimo se localiza en la intersección de g_1 con el eje x_2:

$$g_1 = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 + 2 \leq 0$$

En ese punto: $x_1 = 0$:

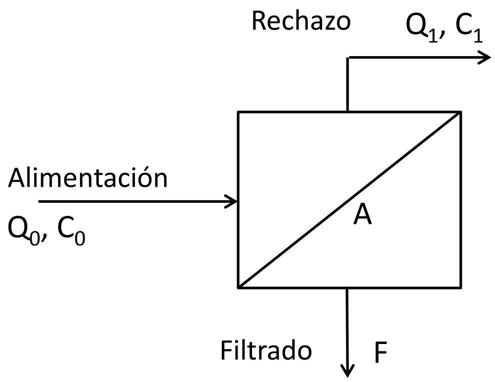
$$-(0 - 1)^2 - x_2^2 + 2 = 0$$
$$x_2^2 = 1$$
$$x_2 = 1$$

Luego, el mínimo se ubica en $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, con f = 1.

2. (3 ptos.) Se necesita diseñar una unidad de ultrafiltración para purificar un solvente valioso. La alimentación tiene un flujo de 1.4 m^3/h y una concentración de impurezas de 0.5 kg/m^3. El flujo a través de la membrana se puede describir con la siguiente ecuación:

$$F = A\,h\,ln\left(\frac{30}{C_1}\right)$$

donde F es el flujo de permeado, A es el área de la membrana, h es el coeficiente de transferencia de materia $(0.02\,\frac{m}{h})$ y C_1 es la concentración de impurezas en el rechazo $(\frac{kg}{m^3})$.



El precio de venta del solvente puro es de $80\ \$/m^3$.
Los costos de operación están dados por $C_{OP}\left(\frac{\$}{h}\right) = 0.002\,A^2$, con $A\ (m^2)$ el área de la membrana.

a) Plantee el problema de optimización para maximizar la utilidad: función objetivo, variables, ecuaciones y grados de libertad.

La función objetivo es la utilidad, que se puede definir como las entradas dadas por la venta del solvente menos el costo de operación:

<u>Maximizar</u>:

$$U\left(\frac{\$}{h}\right) = F\left(\frac{m^3}{h}\right)\cdot P\left(\frac{\$}{m^3}\right) - 0.002\,A^2\left(\frac{\$}{h}\right)$$

Las restricciones están dadas por los balances de materia y la ecuación de diseño de la membrana:

Balance de soluto: $Q_0C_0 = Q_1C_1$

Balance global (suponiendo que las densidades de las corrientes son constantes): $Q_0 = Q_1 + F$

Ecuación de diseño: $F = A\,h\,ln\left(\frac{30}{C_1}\right)$

Variables: $Q_0, Q_1, F, C_0, C_1, A, h$
De las cuales se conocen Q_0, C_0 y h, por lo tanto las variables desconocidas son 4.

Grados de libertad = 4 variables – 3 ecuaciones = 1

El problema tiene una variable independiente, hay espacio para optimizar.

b) Exprese la función objetivo con C_1 como variable independiente.

Combinando los dos balances de materia:

$$F = Q_0\left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right)$$

De la ecuación de diseño:

$$A = \frac{F}{h\ ln\left(\frac{30}{C_1}\right)}$$

Entonces:

$$A = \frac{Q_0\left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right)}{h\ ln\left(\frac{30}{C_1}\right)}$$

Reemplazando términos en la función objetivo:

$$U = P \cdot Q_0\left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right) - 0.002\frac{\left(Q_0\left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right)\right)^2}{\left(h\ ln\left(\frac{30}{C_1}\right)\right)^2}$$

Reemplazando los valores numéricos, cuidando que sean unidades consistentes:

$$U = 112\left(1 - \frac{0.5}{C_1}\right) - 9.8\frac{\left(1 - \frac{0.5}{C_1}\right)^2}{\left(ln\left(\frac{30}{C_1}\right)\right)^2}$$

c) Acote el óptimo partiendo de C_1 = 0.5 kg/m^3 con paso acelerado ($\delta = 0.5$ kg/m^3)

$$x^{k+1} = x^k + \delta \cdot 2^{k-1}$$

k	***C_1 (kg/m^3)***	***U***	***Tendencia de la función***
	0.5	0	
1	1	55.7	crece
2	2	83.2	crece
3	4	96.1	crece
4	8	100.06	crece
5	16	85.2	decrece

Suponiendo que la función es unimodal, el intervalo donde se debe encontrar el máximo es $[4,16]$

d) En el intervalo escogido efectúe dos iteraciones con el método de interpolación cuadrática usando puntos equiespaciados.

Para aplicar el método de interpolación cuadrática se deben elegir 3 puntos iniciales. Para que sean equiespaciados estos serán los siguientes (por simplicidad se utilizará la notación x, f)

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 10$$
$$x_3 = 16$$

Se determina el valor de la función en esos tres puntos:

$$f_1 = 96.1$$
$$f_2 = 99.1$$
$$f_3 = 85.2$$

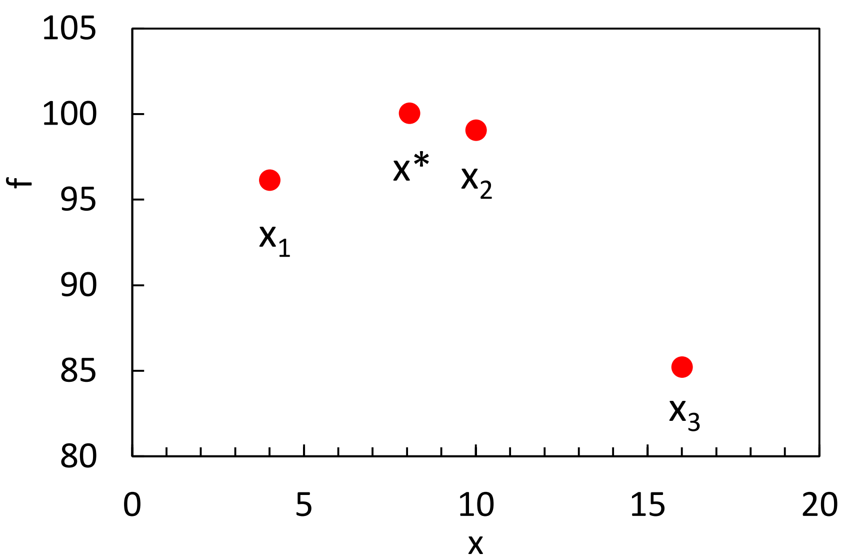
Se utiliza la ecuación del anexo:

$$\tilde{x}^* = \frac{1}{2}\left[\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3}\right]$$

$\tilde{x}^* = 8.065$ (**El valor puede variar dependiendo de los decimales considerados en el cálculo)

Se determina el valor de la función en ese punto: f = 100.06

Se compara el valor de la función en cada punto:



Tomando en cuenta la suposición de unimodalidad, el extremo se debe encontrar entre x_1 y x_2. Luego, los nuevos puntos de interpolación son:

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 8.065$$
$$x_3 = 10$$

Se determina el valor de la función en esos tres puntos:

$$f_1 = 96.1$$
$$f_2 = 100.06$$
$$f_3 = 99.1$$

Segunda iteración:
Con la ecuación de interpolación se obtiene:

$$\tilde{x}^* = 8.02$$
$$f = 100.07$$

Tomando en cuenta la suposición de unimodalidad, el extremo se debe encontrar entre x_1 y x_2. Luego, los nuevos puntos de interpolación son:

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 8.02$$
$$x_3 = 8.065$$

[El óptimo luego de 9 iteraciones, con una precisión de 10^{-3}, es U = 100.1 \$/h, C_1 = 7.64 kg/m^3]

e) Determine la sensibilidad relativa de la utilidad con respecto al coeficiente de transferencia de materia. Si éste aumenta un 20% ¿Estime cuanto varía proporcionalmente el óptimo?

En este caso:

$$S_h^U = \frac{h}{U}\frac{\partial U}{\partial h}$$

La derivada parcial $\frac{\partial U}{\partial h}$ de

$$U = P \cdot Q_0\left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right) - 0.002\frac{\left(Q_0\left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right)\right)^2}{\left(h\, ln\left(\frac{30}{C_1}\right)\right)^2}$$

es:

$$\frac{\partial U}{\partial h} = 0.004\frac{\left(Q_0\left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right)\right)^2}{\left(ln\left(\frac{30}{C_1}\right)\right)^2 h^3}$$

Tomando como base los valores de la última iteración (los más cercanos al óptimo):

$$C_1 = 8.02$$
$$U = 100.07$$

$$\frac{\partial U}{\partial h} = 0.004\frac{\left(1.4\left(1 - \frac{0.5}{8.02}\right)\right)^2}{\left(ln\left(\frac{30}{8.02}\right)\right)^2 0.02^3} = 495$$

$$S_h^U = \frac{h}{U}\frac{\partial U}{\partial h} = \frac{0.02}{100.07} \cdot 495 = 0.0989 \approx 0.1$$

De la definición de sensibilidad relativa:

$$S_h^U = \frac{\partial U/U}{\partial h/h}$$

$$\frac{\partial U}{U} = \frac{\partial h}{h}\, S_h^U$$

Entonces, dado un cambio positivo del 20% en h, el cambio en U es positivo pero de sólo 2% aproximadamente, porque:

$$\frac{\partial U}{U} = 20\% \cdot 0.1 = 2\%$$

Se puede concluir que en este problema la determinación del coeficiente de transferencia de materia no es crítica para definir el óptimo.

Información adicional

Acotación del mínimo con paso acelerado:

$$x^{k+1} = x^k + \delta \cdot 2^{k-1}$$

Método de interpolación cuadrática:

$$\tilde{x}^* = \frac{1}{2}\left[\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3}\right]$$

Sensibilidad relativa de f con respecto a x:

$$S_x^f = \frac{x}{f}\frac{\partial f}{\partial x}$$

AKB/akb 3-5-2019