Certamen 2—PAUTA DE CORRECCIÓN

Optimización de Procesos 2018-1

540.258

1. (1.5 ptos.) Se tiene el siguiente problema de programación lineal:

Maximizar $f = x_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$$-4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 - 4x_2 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Utilice el método Simplex para encontrar una solución básica factible y, a partir de ésta, el óptimo del problema.

<u>Solución</u>:

Escribir el problema en formato simplex: minimización y agregar variables de holgura:

Minimizar $g = -x_1 - 3x_2$

Sujeto a:

$$-4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 7$$

$$x_1 - 4x_2 - x_5 = 12$$

El sistema no está en forma canónica, por lo que una solución básica factible no se puede obtener por inspección. Hay que aplicar la fase I del método Simplex: Se agregan las variables artificiales y_1, y_2, y_3 y se minimiza la función w, o suma de infactibilidades. $w = y_1 + y_2 + y_3$, mediante el algoritmo simplex.

Ec. I		$-4x_1$	$+3x_2$	$+x_3$			$+y_1$			12
Ec. II		x_1	$+x_2$		$+x_4$			$+y_2$		7
Ec. III		x_1	$-4x_2$			$-x_5$			$+y_3$	12
Ec. IV	$-g$	$-x_1$	$-3x_2$							0
Ec. V	$-w$						$+y_1$	$+y_2$	$+y_3$	0

Se transforma el sistema a su forma canónica con y_1, y_2, y_3 variables básicas. Se multiplican Ecs. I a III por (-1) y se suman a Ec. V:

Ec. I		$-4x_1$	$+3x_2$	$\boxed{+x_3}$			$+y_1$			12	12*
Ec. II		x_1	$+x_2$		$+x_4$			$+y_2$		7	
Ec. III		x_1	$-4x_2$			$-x_5$			$+y_3$	12	
Ec. IV	$-g$	$-x_1$	$-3x_2$							0	b/a
Ec. V	$-w$	$+2x_1$		$\boxed{-x_3}$	$-x_4$	$+x_5$				-31	

Esta es una solución básica factible (todas las variables básicas: y_1, y_2 e y_3 están dentro de sus límites). Sin embargo, no es una solución óptima ya que existen $d_i < 0$)

x_3 (podría ser x_4 también) entra al grupo de variables básicas e y_1 sale. Se suma Ec. I a Ec. V

Ec. I		$-4x_1$	$+3x_2$	$+x_3$			$+y_1$			12	
Ec. II		$\boxed{x_1}$	$+x_2$		$+x_4$			$+y_2$		7	7*
Ec. III		x_1	$-4x_2$			$-x_5$			$+y_3$	12	12
Ec. IV	$-g$	$-x_1$	$-3x_2$							0	b/a
Ec. V	$-w$	$\boxed{-2x_1}$	$+3x_2$		$-x_4$	$+x_5$	$+y_1$			-19	

x_1 entra al grupo devariables básicas e y_2 sale. Se suma (4 x Ec. I) a Ec. I, (-1 x Ec. I) a Ec. II, (1 x Ec. I a Ec. IV) y (2 x Ec. I) a Ec. V.

Ec. I			$+7x_2$	$+x_3$	$+4x_4$		$+y_1$	$+4y_2$		40
Ec. II		x_1	$+x_2$		$+x_4$			$+y_2$		7
Ec. III			$-5x_2$		$-x_4$	$-x_5$		$-y_2$	$+y_3$	5
Ec. IV	$-g$		$-2x_2$		$+x_4$			$+y_2$		7
Ec. V	$-w$		$+5x_2$		$+x_4$	$+x_5$	$+y_1$	$+2y_2$		-5

Dado que todos los d_i son mayores que cero, se tiene un óptimo para la función w. Esta solución tiene por variables básicas: $x_3 = 40$, $x_1 = 7$, $y_3 = 5$, g = 7 y w = 5. Las variables no básicas (x_2, x_4, x_5, y_1, y_2) tienen valor 0.

Dado que w = 5 (≠ 0), no hay una solución básica factible para el problema original. Si no hay solución básica factible la fase II del algoritmo simplex no puede comenzar y el problema no tiene solución.

2. (1.5 ptos.) Un supermercado necesita comprar cinco tipos de productos agrícolas a cuatro proveedores en un mes. Los precios de los productos y la capacidad de suministro de cada proveedor, así como los requerimientos mínimos del supermercado se indican a continuación.

Precios de cada producto (miles de pesos/t)

Proveedor	Papas	Tomates	Pepinos	Manzanas	Peras
A	200	600	1600	800	1200
B	300	550	1400	850	1100
C	250	650	1500	700	1000
D	150	500	1700	900	1300

Capacidad de suministro (mensual): proveedor A: 180 t, B: 200 t, C: 100 t, D: 120 t.

Se necesita adquirir un mínimo mensual de 100 t de papas, 60 t de tomates, 20 t de pepinos, 80 t de manzanas y 40 t de peras.

Formule el problema (variables, función objetivo, restricciones y grados de libertad) para encontrar el esquema de adquisiciones que minimiza el costo.

Solución:

Las variables manipuladas corresponden a las cantidades (t/mes) que se compran de cada producto a cada proveedor. Se definen las siguientes variables:

x_1	Cantidad (t/mes) de papas compradas a proveedor A
x_2	Cantidad (t/mes) de tomates compradas a proveedor A
x_3	Cantidad (t/mes) de pepinos compradas a proveedor A
x_4	Cantidad (t/mes) de manzanas compradas a proveedor A
x_5	Cantidad (t/mes) de peras compradas a proveedor A
x_6	Cantidad (t/mes) de papas compradas a proveedor B
x_7	Cantidad (t/mes) de tomates compradas a proveedor B
x_8	Cantidad (t/mes) de pepinos compradas a proveedor B
x_9	Cantidad (t/mes) de manzanas compradas a proveedor B
x_{10}	Cantidad (t/mes) de peras compradas a proveedor B
x_{11}	Cantidad (t/mes) de papas compradas a proveedor C
x_{12}	Cantidad (t/mes) de tomates compradas a proveedor C
x_{13}	Cantidad (t/mes) de pepinos compradas a proveedor C
x_{14}	Cantidad (t/mes) de manzanas compradas a proveedor C
x_{15}	Cantidad (t/mes) de peras compradas a proveedor C
x_{16}	Cantidad (t/mes) de papas compradas a proveedor D
x_{17}	Cantidad (t/mes) de tomates compradas a proveedor D
x_{18}	Cantidad (t/mes) de pepinos compradas a proveedor D
x_{19}	Cantidad (t/mes) de manzanas compradas a proveedor D
x_{20}	Cantidad (t/mes) de peras compradas a proveedor D

La función objetivo es entonces:

$$C\left(\frac{miles\ \$}{mes}\right) = 200\left(\frac{miles\ \$}{t}\right)x_1\left(\frac{t}{mes}\right) + 600x_2 + 1600x_3 + 800x_4 + 1200x_5 + 300x_6$$
$$+ 550x_7 + 1400x_8 + 850x_9 + 1100x_{10} + 250x_{11} + 650x_{12} + 1500x_{13}$$
$$+ 700x_{14} + 1000x_{15} + 150x_{16} + 500x_{17} + 1700x_{18} + 900x_{19} + 1300x_{20}$$

Las restricciones por capacidad de suministro por proveedor son:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 180$$

$$x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 200$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 100$$

$$x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} \leq 120$$

Las restricciones de adquisiciones por ítem son:

$$x_1 + x_6 + x_{11} + x_{16} \geq 100$$

$$x_2 + x_7 + x_{12} + x_{17} \geq 60$$

$$x_3 + x_8 + x_{13} + x_{18} \geq 20$$

$$x_4 + x_9 + x_{14} + x_{19} \geq 80$$

$$x_5 + x_{10} + x_{15} + x_{20} \geq 40$$

Grados de libertad = variables - ecuaciones

G.L. = 20 – 0 = 20

Minimizar función de costos sujeto a 9 restricciones de desigualdad. Adicionalmente $x_i \geq 0$.

3. (2 ptos.) Se necesita minimizar la siguiente función:

$$f = (2xy - 3)^2 + (x^2 - y - 2)^2$$

Partiendo desde el origen, efectúe dos iteraciones utilizando el método de Newton. Asegure direcciones minimizantes utilizando las herramientas adecuadas.

Considere paso Newton (t = 1).

Solución:

Dado que el método de Newton sólo es minimizante cuando la Hessiana es definida positiva en la región de análisis, es necesario calcular los valores propios de ésta:

$$\frac{df}{dx} = 2(2xy - 3)2y + 2(x^2 - y - 2)2x = 8xy^2 - 12y + 4x^3 - 4xy - 8x$$

$$\frac{df}{dy} = 2(2xy - 3)2x - 2(x^2 - y - 2) = 8x^2y - 12x - 2x^2 + 2y + 4$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 8y^2 + 12x^2 - 4y - 8$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = 8x^2 + 2$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d^2f}{dydx} = 16xy - 12 - 4x$$

En el punto inicial $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, f = 13 y la Hessiana es:

$$H = \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios se obtienen de:

$$det(H - \lambda I) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} -8 - \lambda & -12 \\ -12 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda - 160 = 0$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \times 160}}{2}$$

$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = -16$

Dado que los valores propios son de distinto signo, la Hessiana es indefinida por lo que el punto inicial está en una región de punto de silla.

Se debe usar la corrección de Marquardt y Levenberg:

$$\beta = |-16| + 1 = 17$$

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ -12 & 2 \end{pmatrix} + 17\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 19 \end{pmatrix}$$

Esa Hessiana modificada se usa en la primera iteración:

$$\widetilde{H}(\underline{x}^0)\Delta\underline{x} = -\nabla f(\underline{x}^0)$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$9\Delta x - 12\Delta y = 0$$

$$-12\Delta x + 19\Delta y = -4$$

Se multiplica la primera ecuación por 12/9:

$$12\Delta x - 16\Delta y = 0$$

$$-12\Delta x + 19\Delta y = -4$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$3\Delta y = -4$$

$$\Delta y = -1.333 = y_1 - y_0$$

$$\Delta x = -1.777 = x_1 - x_0$$

Entonces:

$x_1 = -1.777$, $y_1 = -1.333$. Además, en este punto f = 8.98, el valor de la función disminuyó.

Estudiamos la definición de H en este nuevo punto:

$$H(\underline{x}^1) = \begin{pmatrix} 49.48 & 33 \\ 33 & 27.28 \end{pmatrix}$$

En este punto los valores propios de H son:

$$det(H - \lambda I) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} 49.48 - \lambda & 33 \\ 33 & 27.28 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 76.76\lambda + 260.81 = 0$$

$$\lambda = \frac{76.76 \pm \sqrt{5892.1 - 4 \times 260.81}}{2}$$

$\lambda_1 = 73.2, \lambda_2 = 3.565$

Al ser positivos, H es definida positiva, luego la región es convexa y el método de Newton avanza a un mínimo. Por lo tanto, en esta segunda iteración no es necesario corregir H.

$$\nabla f(\underline{x}^1) = \begin{pmatrix} -26.97 \\ -17.33 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$H(\underline{x}^1)\Delta\underline{x} = -\nabla f(\underline{x}^1)$$

$$\begin{pmatrix} 49.48 & 33 \\ 33 & 27.28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -26.97 \\ -17.33 \end{pmatrix}$$

$$49.48\Delta x + 33\Delta y = 26.97$$

$$33\Delta x + 27.28\Delta y = 17.33$$

Se multiplica la primera ecuación por -0.666:

$$-33\Delta x - 21.98\Delta y = -17.96$$

$$33\Delta x + 27.28\Delta y = 17.33$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$5.3\Delta y = -0.63$$

$$\Delta y = -0.119 = y_2 - y_1$$

$$\Delta x = 0.623 = x_2 - x_1$$

Entonces:

$x_2 = -1.154$, $y_2 = -1.452$. En este punto f = 0.737, el valor de la función continúa disminuyendo.

4. (1 pto.) Indique el número de minimizaciones direccionales necesarias para minimizar la función $f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 5$ para cada uno de los algoritmos siguientes. Justifique su respuesta. Sea $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solución:

a) Método de Newton

Dado que la función es cuadrática, el método de Newton llega a un punto estacionario en una iteración. Si la función es convexa, ese punto estacionario corresponde a un mínimo.

b) Método de Powell

Para una función cuadrática, el método de Powell va a efectuar 3 minimizaciones en los ejes cartesianos más una minimización en una dirección conjugada a uno de los ejes cartesianos. Dado que la función es cuadrática de 2 variables, y se minimiza en un par de direcciones conjugadas, se debería llegar al mínimo en máximo esas 4 iteraciones.

c) Método del gradiente conjugado

Las direcciones de minimización son el gradiente más una dirección nueva que es conjugada a la inicial. Para una función cuadrática de 2 variables, se llega al mínimo en máximo 2 iteraciones si las direcciones son mutuamente conjugadas.

Mínimo direccional exacto para funciones cuadráticas.

$$t = \frac{-\nabla^T f(\underline{x}_0)\,\underline{s}}{\underline{s}^T \boldsymbol{H}\,\underline{s}}$$

Método de Newton con procedimiento de Levenberg-Marquardt

$$\Delta\underline{x}_k = -\boldsymbol{H}^{-1}(\underline{x}_k)\,\nabla f(\underline{x}_k)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H} + \beta\boldsymbol{I}$$

$$\beta = \begin{cases} |\min\lambda_i| + 1, & si\ \min\lambda_i \leq 0 \\ 0, & si\ \min\lambda_i > 0 \end{cases}$$

Gradiente conjugado

$$\underline{s}^0 = -\nabla f(\underline{x}_0)$$

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 + t^0\underline{s}^0$$

$$\underline{s}^1 = -\nabla f(\underline{x}_1) + \underline{s}^0\,\frac{\nabla^T f(\underline{x}_1)\nabla f(\underline{x}_1)}{\nabla^T f(\underline{x}_0)\nabla f(\underline{x}_0)}$$

$$\underline{s}^{k+1} = -\nabla f(\underline{x}_{k+1}) + \underline{s}^k\,\frac{\nabla^T f(\underline{x}_{k+1})\nabla f(\underline{x}_{k+1})}{\nabla^T f(\underline{x}_k)\nabla f(\underline{x}_k)}$$

Reiniciar algoritmo cuando k = n + 1 con n: número de variables.

Direcciones conjugadas

$$(\underline{s}^i)^T\boldsymbol{H}\,\underline{s}^j = 0$$

Método de Powell

0. Calcular t^I tal que $f(\underline{x}_I + t^I\underline{s}^n)$ es un mínimo y definir $\underline{x}_0 = \underline{x}_I + t^I\underline{s}^n$
1. Para j = 1,…, n
   Calcular t^j tal que $f(\underline{x}_{j-1} + t^j\underline{s}^j)$ es un mínimo y definir $\underline{x}_j = \underline{x}_{j-1} + t^j\underline{s}^j$
   Reemplazar $\underline{s}^j$ por $\underline{s}^{j+1}$
2. Reemplazar $\underline{s}^n$ con $\underline{x}_n - \underline{x}_0$
3. Calcular t tal que $f(\underline{x}_n + t(\underline{x}_n - \underline{x}_0))$ es un mínimo y reemplazar $\underline{x}_0$ con $\underline{x}_n + t(\underline{x}_n - \underline{x}_0)$
4. Repetir pasos 1 a 3 hasta que se satisfaga un criterio de detención.

AKB

22 de junio de 2018