Optimización de Procesos 540.258
2020-1

Certamen 2

1. (2 ptos.) Una empresa de aglomerantes para la fabricación de tableros de fibra produce dos tipos de aditivos, C1 y C2, mediante una tecnología batch. Se dispone para este efecto de dos líneas de proceso, L1 y L2, con capacidades máximas de operación de 3 y 4 horas, respectivamente, por ciclo batch. Se sabe que la producción de 1 tonelada de C1 requiere de 2 horas de procesamiento en L1 y 4 horas de procesamiento en L2, en tanto que la producción de una tonelada de C2 requiere de un procesamiento de 3 horas en L1 y 1 hora en L2 (tiempo expresado por ciclo operativo). Las condiciones de mercado de la venta de aditivos permiten estimar que la utilidad del aditivo C1 es de US$ 1000/Ton y la del aditivo C2 es US$ 2000/Ton. Se requiere planificar la producción de modo de optimizar la utilidad por ciclo productivo (un ciclo batch).

a) Plantee el problema de optimización: función objetivo, restricciones y grados de libertad. 0.5
b) Formatee y resuelva mediante el método simplex, efectuando los pasos detallados del algoritmo. Discuta los resultados. 0.5
c) Considere la interpretación gráfica del problema. Grafique dos contornos de la función objetivo (uno de ellos el de la utilidad óptima), las restricciones e indique la región factible. Determine el vértice que corresponde al óptimo del problema. 0.5
d) Explique qué variación en las utilidades de C1 implicaría un cambio en el esquema de producción óptimo (en el sentido de suspender o reiniciar la producción de un producto). 0.5

2. (2 ptos.) Considere el siguiente problema de optimización:

Minimizar $f = max\{10 - x_1 - x_2,\ \ 6 + 6x_1 - 3x_2,\ \ 6 - 3x_1 + 6x_2\}$

a) Explique por qué el método Nelder-Mead podría ser apropiado para resolver este problema, en comparación a los métodos indirectos. 0.5
b) Efectúe 3 iteraciones del método Nelder-Mead partiendo de los puntos: $\boldsymbol{y^1} = [5;\ 0]$, $\boldsymbol{y^2} = [10;\ 5]$ y $\boldsymbol{y^3} = [5;\ 5]$. Determine los los centroides $\boldsymbol{x^0}$, $\boldsymbol{x^1}$, $\boldsymbol{x^2}$ y $\boldsymbol{x^3}$ y sus respectivos $f(\boldsymbol{x^t})$. 1.5

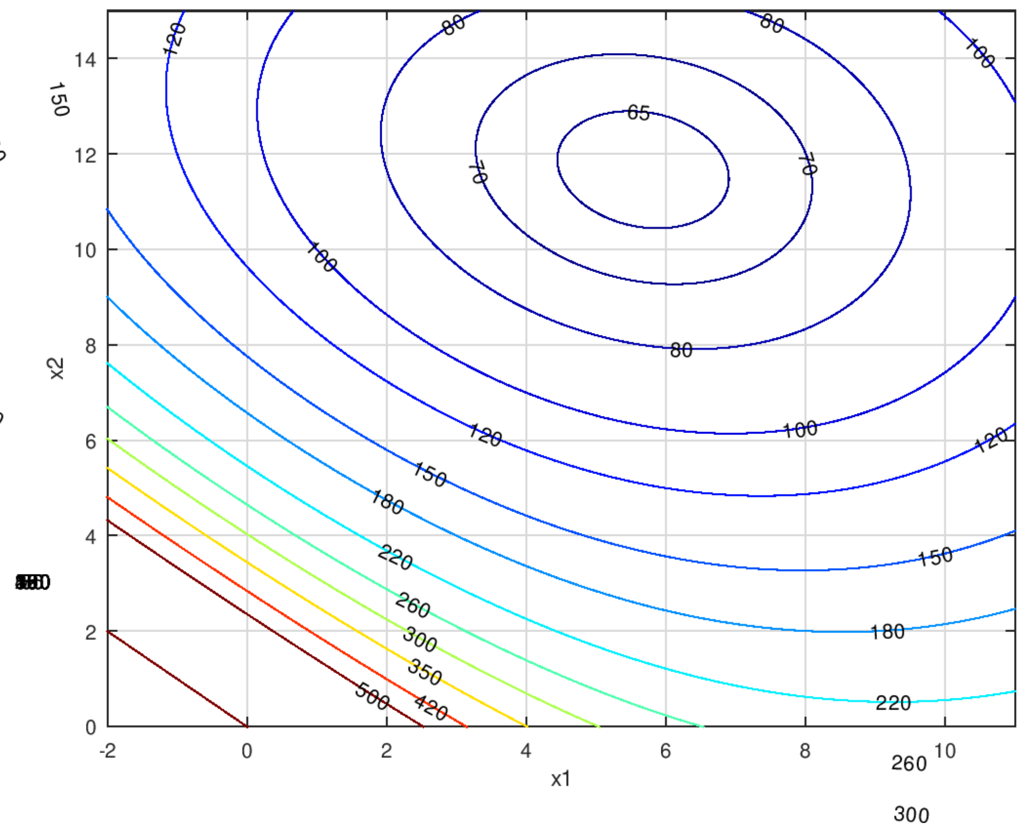
3. (2 ptos.) Considere el siguiente problema de optimización:

Minimizar $f = \frac{1000}{x_1 + x_2} + (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 10)^2$

Desde el punto inicial $\boldsymbol{x^0} = [3;\ 1]$

a) Minimice (2 iteraciones) utilizando el método de Newton convencional (t = 1). 0.6
b) Minimice (2 iteraciones) utilizando el método del gradiente. Para las minimizaciones direccionales utilice los siguientes valores de $t^0 = 0.0955$ y $t^1 = 0.498$. 0.6
c) Grafique el avance de cada método en el gráfico adjunto que representa algunos contornos de la función objetivo (*). ¿Qué método logró un mejor avance hacia el mínimo en esas dos iteraciones? Explique el origen de esas diferencias. 0.8

(*): Si prefiere haga un esbozo del gráfico e incorpore ahí la información pedida.



AKB/akb 10-07-2020

CERTAMEN 2

(1)

	L1	L2
C1	2 h/ton	4 h/ton
C2	3 h/ton	1 h/ton

L1 capacidad máx 3h
L2 capacidad máx. 4h

Utilidad C_1 : 1000 US$/ton
Utilidad C_2 : 2000 US$/ton

Variables de decisión: X_1: ton. de C_1 producidas /ciclo
X_2: " C_2 " /ciclo

$$U \left(\frac{US\$}{ciclo}\right) = 1000 \frac{US\$}{ton} \cdot X_1 \left(\frac{ton}{ciclo}\right) + 2000 X_2$$

Restricciones de capacidad de procesamiento

$$2 \frac{h}{ton} \cdot X_1 \left(\frac{ton}{ciclo}\right) + 3X_2 \leq 3$$

$$4X_1 + X_2 \leq 4$$

Problema de optimización

MAXIMIZAR $f = 1000 X_1 + 2000 X_2$

s.a. $2X_1 + 3X_2 \leq 3$

$4X_1 + X_2 \leq 4$

grados de libertad $= \underset{VAR.}{2} - \underset{ECS.}{0} = 2$

5) Simplex minimizar $f = -1000x_1 - 2000x_2$

s.a. $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$

$4x_1 + x_2 + x_4 = 4$

$$
\begin{array}{lllll}
2x_1 + 3x_2 + x_3 & & = 3 & & b/a \quad 1 \text{ (menor)} \\
4x_1 + x_2 & + x_4 & = 4 & & 4 \\
-g - 1000x_1 - 2000x_2 & & = 0 & &
\end{array}
$$

(min $c_j < 0$)

El sistema está en forma canónica formando una solución básica factible. $x_1 = 0$ $x_3 = 3$, $x_2 = 0$ $x_4 = 4$

Esta solución no es óptima porque $c_j < 0$

Se pivotea en ◯

$$
\begin{array}{lll}
\frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 & & = 1 \\
4x_1 + x_2 & + x_4 & = 4 \\
-g - 1000x_1 - 2000x_2 & & = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 & & = 1 \\
3{,}\bar{3}\,x_1 & -\frac{1}{3}x_3 + x_4 & = 3 \\
-g + 333x_1 & + 666{,}7x_3 & = 2000
\end{array}
$$

Esta solución es óptima porque $c_j > 0$

$x_1^* = 0$ $x_3^* = 0$ $g = -2000$

$x_2^* = 1$ $x_4^* = 3$ $f = 2000$

Para maximizar la utilidad hay que producir 1 ton/ciclo de C2 y 0 ton/ciclo de C1, la utilidad es $U = 2000 \frac{US\$}{ciclo}$.

c)

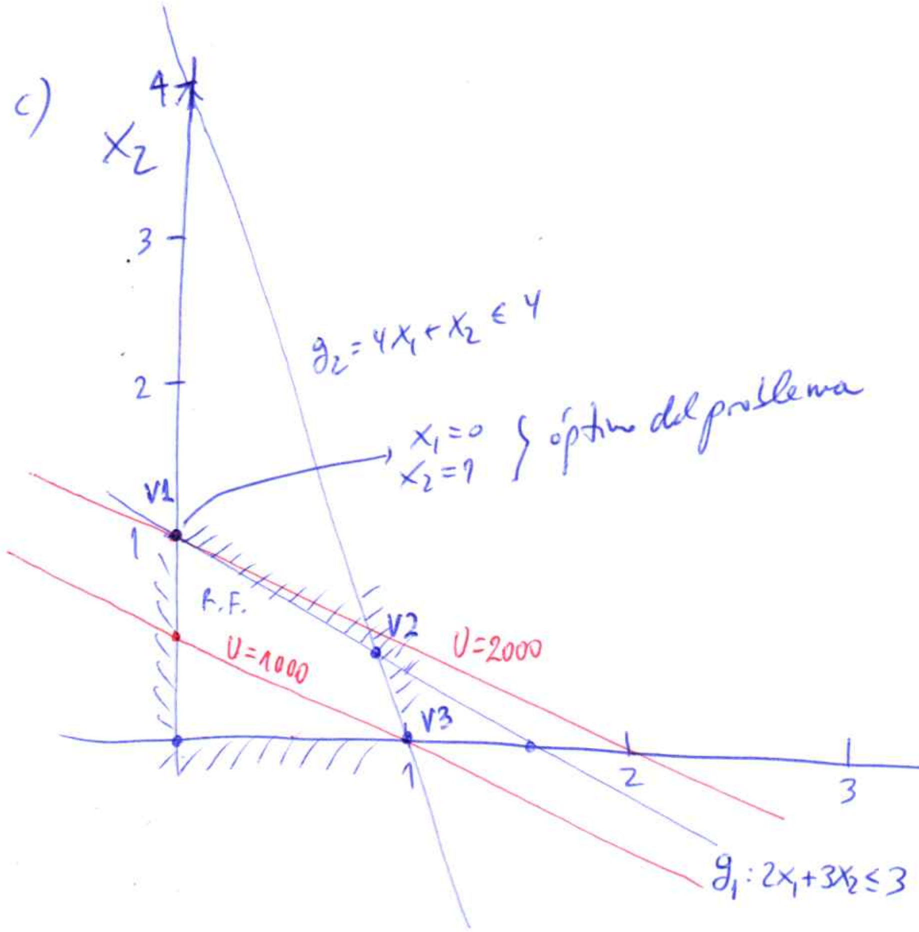


Gráfico de contornos

$g_1 : 2x_1 + 3x_2 \leq 3$

$x_2 = \frac{3 - 2x_1}{3}$

$x_2 = 1 - \frac{2}{3}x_1$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$
$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$
$x_1 = 1{,}5 \quad x_2 = 0$

$g_2 : 4x_1 + x_2 \leq 4$

$x_2 = 4 - 4x_1$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$
$x_1 = 1 \quad x_2 = 0$

$U = 1000\,x_1 + 2000\,x_2$

$U = 2000 = 1000\,x_1 + 2000\,x_2$

$x_2 = \frac{2000 - 1000\,x_1}{2000}$

$x_2 = 1 - 0{,}5\,x_1$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$
$x_1 = 2 \quad x_2 = 0$

$U = 1000$

$1000 = 1000\,x_1 + 2000\,x_2$

$x_2 = \frac{1000 - 1000\,x_1}{2000}$

$x_2 = 0{,}5 - 0{,}5\,x_1$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0{,}5$
$x_1 = 1 \quad x_2 = 0$

d) Un cambio en el esquema de producción se daría si el óptimo estuviera localizado en los vértices V2 (se producen C_1 y C_2) ó V3 (se produce C_1 y no C_2).

Para que eso suceda la pendiente de la función objetivo debe ser menor a la de la restricción g_1

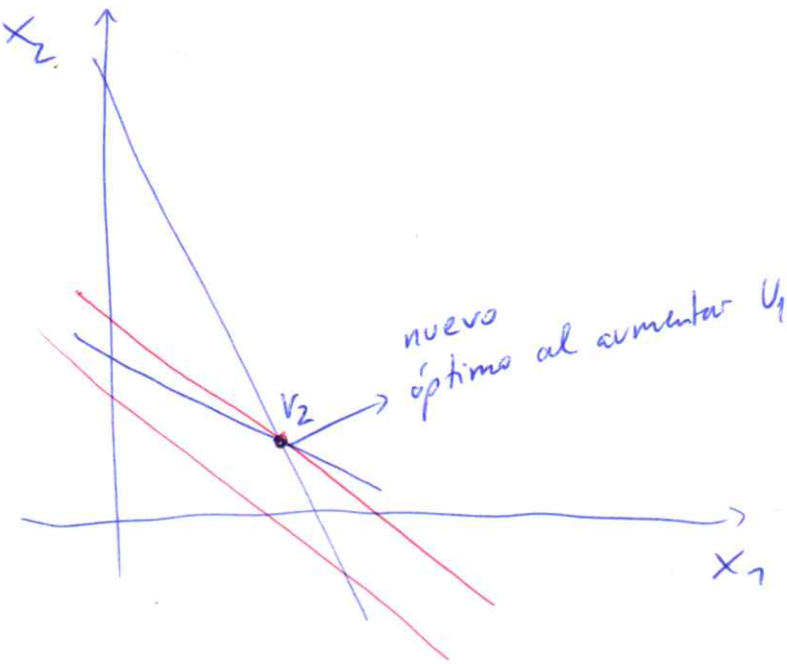
$U = U_1 x_1 + 2000\,x_2$ $\quad U_1$: la utilidad de C_1 (US\$/ton)

$x_2 = \frac{U}{2000} - \frac{U_1}{2000}x_1$ $\quad$ y $\quad g_1 : x_2 = 1 - \frac{2}{3}x_1$

igualando las pendientes

$$\frac{U_1}{2000} = \frac{2}{3} \rightarrow U_1 = 1333 \text{ US\$/ton}$$

∴ si las utilidades de U_1 aumentan a 1333 ó más, se debería producir tanto C_1 como C_2 para maximizar la utilidad



② $f = \max\{10 - x_1 - x_2,\ 6 + 6x_1 - 3x_2,\ 6 - 3x_1 + 6x_2\}$

a) Esta función podría no ser diferenciable en todos los puntos. Un método que no use derivadas como Nelder-Mead puede funcionar sin problemas para este tipo de funciones.

b) $\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{x}^2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{x}^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$f = \max(5, 36, -9)$ $\quad -5, 51, 6$ $\quad 0, 21, 21$

$f = 36$ $\quad f = 51$ $\quad f = 21$

$y^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{y}^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{y}^3_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$f = 21$ $\quad f = 36$ $\quad f = 51$

centroide

$t = 0$ $\quad \underline{x}^0 = \frac{1}{2}(\underline{y}_1 + \underline{y}_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ $\quad f(\underline{x}^0) = \max(2{,}5,\ 28{,}5,\ 6)$

$f(\underline{x}^0) = 28{,}5$

Dirección:

$\underline{s}^1 = \underline{x}^0 - \underline{y}^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$

Reflexión $\lambda = 1$

$f(\underline{x}^0 + \underline{s}^1) = f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 10$

es menor que $f(\underline{y}^1)$, expandir

$\lambda = 2$ $\quad \max\{17{,}5,\ -16{,}5,\ 6\}$

$f(\underline{x}^0 + 2\underline{s}^1) = f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} \cdot 2\right) = f\begin{pmatrix} -5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = 17{,}5$

con $\lambda=2$ la función empieza a aumentar, mantener $\lambda=1$

Se reemplaza el peor (y_3) con $\underline{x}^0+\underline{s}^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $(f=10)$

$$\underline{y}^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \underline{y}^2=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \quad \underline{y}^3=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

$$f=10 \quad f=21 \quad f=36$$

Centroide

$t=1$ $\quad \underline{x}^1=\frac{1}{2}(y^1+y^2)=\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$ $\quad f(\underline{x}^1)=\max\{5,\ 13{,}5,\ 13{,}5\}$

$f(\underline{x}^1)=13{,}5$

Dirección $\quad \underline{s}^2=\underline{x}^1-\underline{y}^3=\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$

Reflexión $\quad \lambda=1$ $\quad \max\{5,-9,36\}$

$$f(\underline{x}^1+\underline{s}^2)=f\left(\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=36$$

no es mejor que $f(\underline{y}^3)$. contraer.

Contracción $\quad \lambda=\frac{1}{2}$ $\quad \max\{5,\ 2{,}25,\ 24{,}75$

$$f(\underline{x}^1+\tfrac{1}{2}\underline{s}^2)=f\left(\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}+0{,}5\begin{pmatrix}-2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}1{,}25\\3{,}75\end{pmatrix}=\underline{24{,}75}$$

$\lambda=-1/2$ $\quad \max\{5,\ 24{,}75,\ 2{,}25\}$

$$f(\underline{x}^1-\tfrac{1}{2}\underline{s}^2)=f\left(\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}-0{,}5\begin{pmatrix}-2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}3{,}75\\1{,}25\end{pmatrix}=\underline{24{,}75}$$

Reemplazar y^3 por $\underline{x}^1+\frac{1}{2}\underline{s}^2$ (podría ser $\underline{x}^1-\frac{1}{2}\underline{s}^2$)

$$y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{y}^3 = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 3,75 \end{pmatrix}$$

$$f = 10 \qquad f = 21 \qquad f = 24,75$$

Centroide $t=2$ $\quad \underline{x}^2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \quad (= \underline{x}^1)$

$$f(\underline{x}^2) = 13,5$$

Dirección $\quad \underline{s}^3 = \underline{x}^2 - \underline{y}^3 = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,25 \\ 3,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 \\ -1,25 \end{pmatrix}$

Reflexión $\quad \lambda = 1$

$$f(\underline{x}^2 + \underline{s}^3) = f\left(\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,25 \\ -1,25 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 3,75 \\ 1,25 \end{pmatrix} = 24,75$$

no es mejor que $f(y^3)$: contraer

$\max\{5, 19,125, 7,825\}$

Contracción $\quad \lambda = \frac{1}{2}$

$$f(\underline{x}^2 + \tfrac{1}{2}\underline{s}^3) = f\left(\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1,25 \\ -1,25 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 3,125 \\ 1,875 \end{pmatrix} = 19,125$$

$\max\{5, 7,875, 19,125\}$

$\lambda = -\frac{1}{2}$

$$f(\underline{x}^2 - \tfrac{1}{2}\underline{s}^3) = f\left(\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} - 0,5\begin{pmatrix} 1,25 \\ -1,25 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 1,875 \\ 3,125 \end{pmatrix} = 19,125$$

mejor que λ_1

Reemplazar $\underline{y}^3$ con $\underline{x}^2 + \frac{1}{2}\underline{s}^3 = \begin{pmatrix} 3,125 \\ 1,875 \end{pmatrix}$

$$y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{y}^2 = \begin{pmatrix} 3,125 \\ 1,875 \end{pmatrix} \quad \underline{y}^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$f = 10 \qquad f = 19,125 \qquad f = 21$$

$\max\{7,5, 12,5625, 6,9375\}$

$t=3$ Centroide $\quad \underline{x}^3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \begin{pmatrix} 1,5625 \\ 0,9375 \end{pmatrix} \qquad f(\underline{x}^3) = 12,5625$

(3)

a) $f = \dfrac{1000}{x_1+x_2} + (x_1-4)^2 + (x_2-10)^2$ $\qquad \underline{x}^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = -1000(x_1+x_2)^{-2} + 2(x_1-4)$ $\qquad f(\underline{x}^0) = 332$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = -1000(x_1+x_2)^{-2} + 2(x_2-10)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2000(x_1+x_2)^{-3} + 2$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2000(x_1+x_2)^{-3}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2000(x_1+x_2)^{-3} + 2$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 2000(x_1+x_2)^{-3}$

Newton $\qquad \underline{\underline{H}}(\underline{x}^0)\, \underline{s}^0 = -\nabla f(\underline{x}^0)$

$$\begin{bmatrix} 33{,}25 & 31{,}25 \\ 31{,}25 & 33{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64{,}5 \\ 80{,}5 \end{bmatrix}$$

$33{,}25\, s_1 + 31{,}25\, s_2 = 64{,}5 \quad / \div 33{,}25$

$31{,}25\, s_1 + 33{,}25\, s_2 = 80{,}5$

$s_1 + 0{,}9398\, s_2 = 1{,}9398 \quad / \times\, \bar{}\,31{,}25 + \text{ec.2.}$

$31{,}25\, s_1 + 33{,}25\, s_2 = 80{,}5$

$3{,}88\, s_2 = 19{,}88 \quad \rightarrow s_2 = 5{,}124$

$s_1 = -2{,}876$

$$\underline{s}^0 = \begin{bmatrix} -2{,}876 \\ 5{,}124 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^1 = \underline{x}^0 + \underline{s}^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2{,}876 \\ 5{,}124 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}124 \\ 6{,}124 \end{bmatrix} \qquad f(\underline{x}^1) = 190$$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} 10,2 & 8,2 \\ 8,2 & 10,2 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} -33,37 \\ -33,37 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{x}^1)\, \underline{s}^1 = -\nabla f(\underline{x}^1)$$

$$\begin{bmatrix} 10,2 & 8,2 \\ 8,2 & 10,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33,37 \\ 33,37 \end{bmatrix}$$

$$10,2\, s_1 + 8,2\, s_2 = 33,37 \quad / \div 10,2$$
$$8,2\, s_1 + 10,2\, s_2 = 33,37$$

$$s_1 + 0,804\, s_2 = 3,27 \quad / \cdot(-8,2) + \text{ec.} 2$$
$$8,2\, s_1 + 10,2\, s_2 = 33,37$$

$$3,6072\, s_2 = 6,556$$

$$s_2 = 1,817 \qquad s_1 = 1,81$$

$$\underline{x}^2 = \underline{x}^1 + \underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 0,124 \\ 6,124 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,81 \\ 1,817 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,934 \\ 7,941 \end{bmatrix}$$

b) Método del gradiente $\quad \underline{s}^0 = -\nabla f(\underline{x}^0)$

$$\underline{s}^0 = \begin{bmatrix} 64,5 \\ 80,5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^1 = \underline{x}^0 + t\,\underline{s}^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 64,5 \\ 80,5 \end{bmatrix} \qquad t^* = 0,0955$$

$$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 9,159 \\ 8,688 \end{bmatrix} \qquad f(\underline{x}^1) = 84,37$$

$$\nabla f(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} 7{,}178 \\ -5{,}76 \end{bmatrix}$$

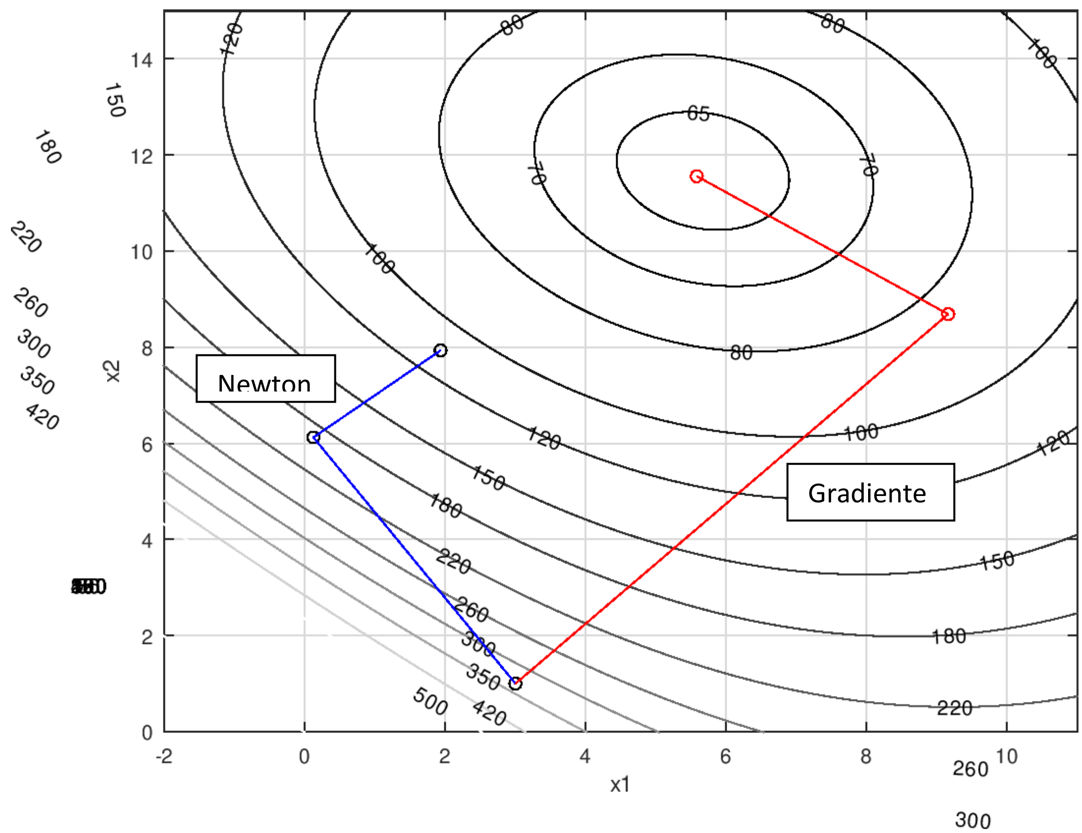
$$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} -7{,}178 \\ 5{,}76 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^2 = \underline{x}^1 + t\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 9{,}159 \\ 8{,}688 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -7{,}178 \\ 5{,}76 \end{bmatrix} \qquad t^* = 0{,}498$$

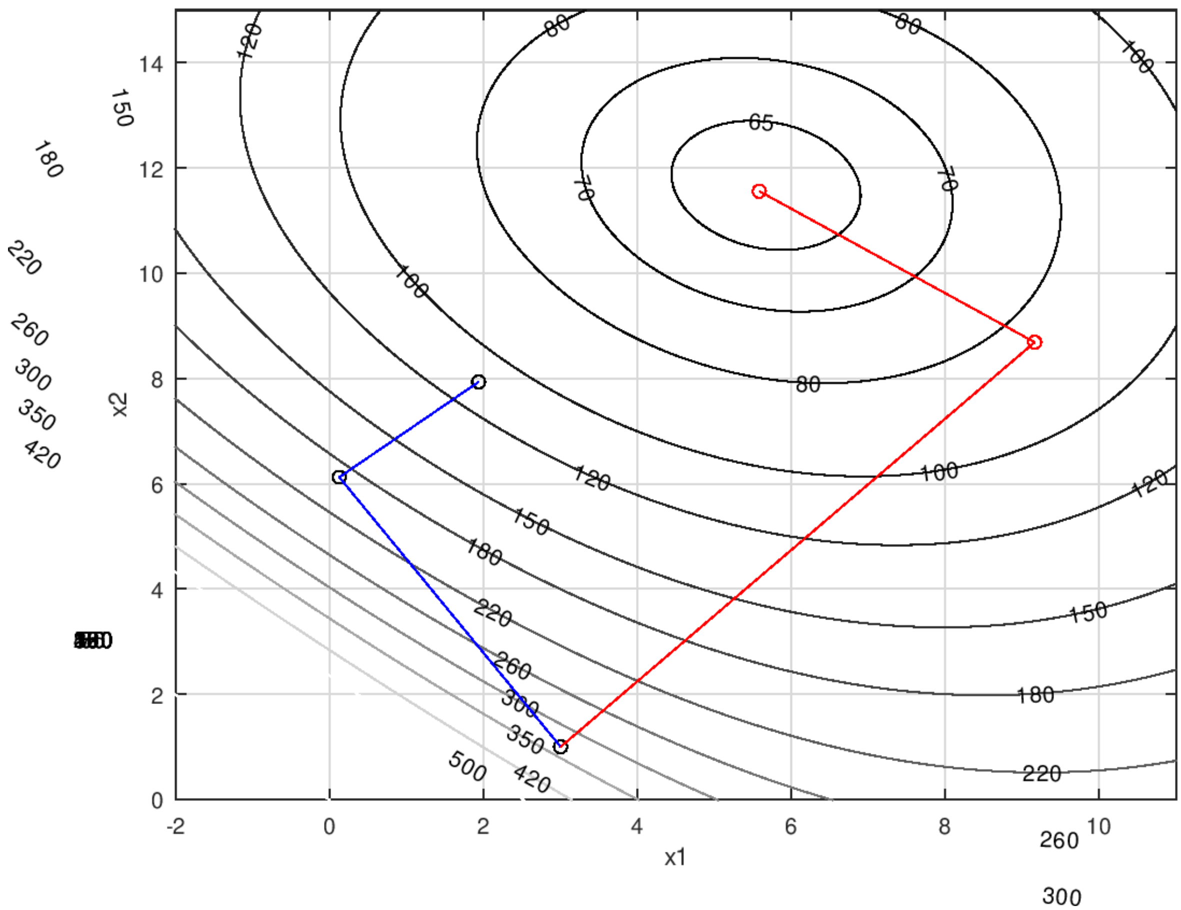
$$\underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 5{,}58 \\ 11{,}56 \end{bmatrix} \qquad f(\underline{x}^1) = 63{,}27 \qquad \nabla f(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} -0{,}24 \\ -0{,}28 \end{bmatrix}$$

c) En la figura de la pág. siguiente se observa el avance de Newton y Gradiente. Para este caso, el avance del método del gradiente es superior.

El método de Newton minimiza la aproximación cuadrática de la función alrededor del punto de iteración. Se nota que para $\underline{x}^0$ la curvatura de la función genera una cuadrática que no es representativa de un amplio rango de valores (x_1, x_2) fuera de $\underline{x}^0$.



Newton
Gradiente
x1
x2



x1
x2
-2
0
2
4
6
8
10
14
12
65
70
80
100
120
150
180
220
260
300
350
420
500