Optimización de Procesos 540.258
2022-1

Certamen 2
pauta

1. (1.5 ptos.) Una compañía produce tres productos (A, B y C) para lo cual utiliza 3 líneas de producción (L1, L2 y L3). Se requiere determinar el esquema de producción que maximiza la utilidad. El producto A tiene que ser procesado en las líneas L1, L2 y L3, el producto B requiere L1 y L3 y el producto C requiere L1 y L2. La utilidad por unidad para cada producto es \$4, \$2 y \$5 para A, B y C, respectivamente.

La formulación del problema es la siguiente:

Maximizar $\quad Utilidad = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3$

Sujeto a:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$
$$3x_1 + 2x_3 \leq 460$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 450$$

Donde x_1, x_2, x_3 son las cantidades de producto A, B y C y las restricciones representan las capacidades de las líneas L1, L2 y L3.

a) Resuelva este problema de programación lineal mediante la metodología simplex.

Hay que transformar el sistema a su forma estándar. Es decir, la función debe ser de minimización y las restricciones de igualdad añadiendo variables de holgura.
Queda de la siguiente manera:

Minimizar $\quad f = -4x_1 - 2x_2 - 5x_3$

Sujeto a:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 430$$
$$3x_1 + 2x_3 + x_5 = 460$$
$$x_1 + 4x_2 + x_6 = 450$$

El sistema se encuentra en forma canónica y la solución básica que se tiene es factible. En efecto $x_4 = 430$, $x_5 = 460$, $x_6 = 450$ y $x_1, x_2, x_3 = 0$

Se puede escribir como tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	b/a
	1	2	1	1	0	0	430	430
	3	0	**2**	0	1	0	460	230
	1	4	0	0	0	1	450	∞
$-f$	-4	-2	-5	0	0	0	0	

min Cj < 0

Dado que el menor b/a es 230, la variable básica x_5 pasa a ser no básica, mientras que x_3 pasa a las básicas. Se pivotea en el término en negrita para eliminar x_3 de toda la columna, excepto en el punto de pivoteo. Así:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	2	1	1	0	0	430
	1.5	0	**1**	0	0.5	0	230
	1	4	0	0	0	1	450
$-f$	-4	-2	-5	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	b/a
	-0.5	**2**	0	1	-0.5	0	200	100
	1.5	0	1	0	0.5	0	230	∞
	1	4	0	0	0	1	450	112.5
$-f$	3.5	-2	0	0	2.5	0	1150	
		min Cj < 0						

La función disminuyó de 0 a -1150.
Dado que el menor b/a es 100, la variable básica x_4 pasa a ser no básica, mientras que x_2 pasa a las básicas. Se pivotea en el término en negrita para eliminar x_2 de toda la columna, excepto en el punto de pivoteo. Así:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	-0.25	**1**	0	0.5	-0.25	0	100
	1.5	0	1	0	0.5	0	230
	1	4	0	0	0	1	450
$-f$	3.5	-2	0	0	2.5	0	1150

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	-0.25	1	0	0.5	-0.25	0	100
	1.5	0	1	0	0.5	0	230
	2	0	0	-2	1	1	50
$-f$	3	0	0	1	2	0	1350

La función disminuyó de -1150 a -1350.
Todos los Cj son positivos, la solución factible es óptima.

$$\boldsymbol{x_1 = 0}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 100}$$
$$\boldsymbol{x_3 = 230}$$
$$\boldsymbol{f = -1350}$$

La **utilidad máxima es 1350**

El esquema de producción óptimo es 0 unidades de A, 100 unidades de B y 230 unidades de C

b) La resolución de este problema mediante el comando Solver de Excel entrega la siguiente información:

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
C20	Línea 1	430	1	430	25	200
C21	Línea 2	460	2	460	400	50
C22	Línea 3	400	0	450	1E+30	50

Determine, en base a esta información, la utilidad máxima cuando: i) la capacidad de la línea 1 se reduce en 122 unidades, ii) la capacidad de la línea 2 se aumenta a 580 y iii) la línea 3 aumenta su capacidad a 700.

Hay que utilizar la definición de precios sombra

$$\lambda = \frac{\Delta U}{\Delta b}$$

Para cada caso hay que cuidar que el cambio en el lado derecho de la ecuación no sobrepase lo indicado en la tabla ('permisible aumentar o disminuir') porque en ese caso las restricciones activas en el óptimo serían diferentes y los precios sombra cambiarían.

i)

$$U = U_0 + \lambda \Delta b$$

Entonces:

$$U = 1350 + 1 \times -122$$
$$U = 1228$$

ii)

$$U = 1350 + 2 \times (580 - 460)$$
$$U = 1590$$

iii)

$$U = 1350 + 0 \times (700 - 450)$$
$$U = 1350$$

Cambios en la capacidad de las líneas 1 y 2 tienen los efectos esperados en la utilidad máxima. La línea 3 no afecta el óptimo. Esta información puede usarse para tomar decisiones en la empresa, por ejemplo si invertir en mejorar una línea de producción es útil o no.

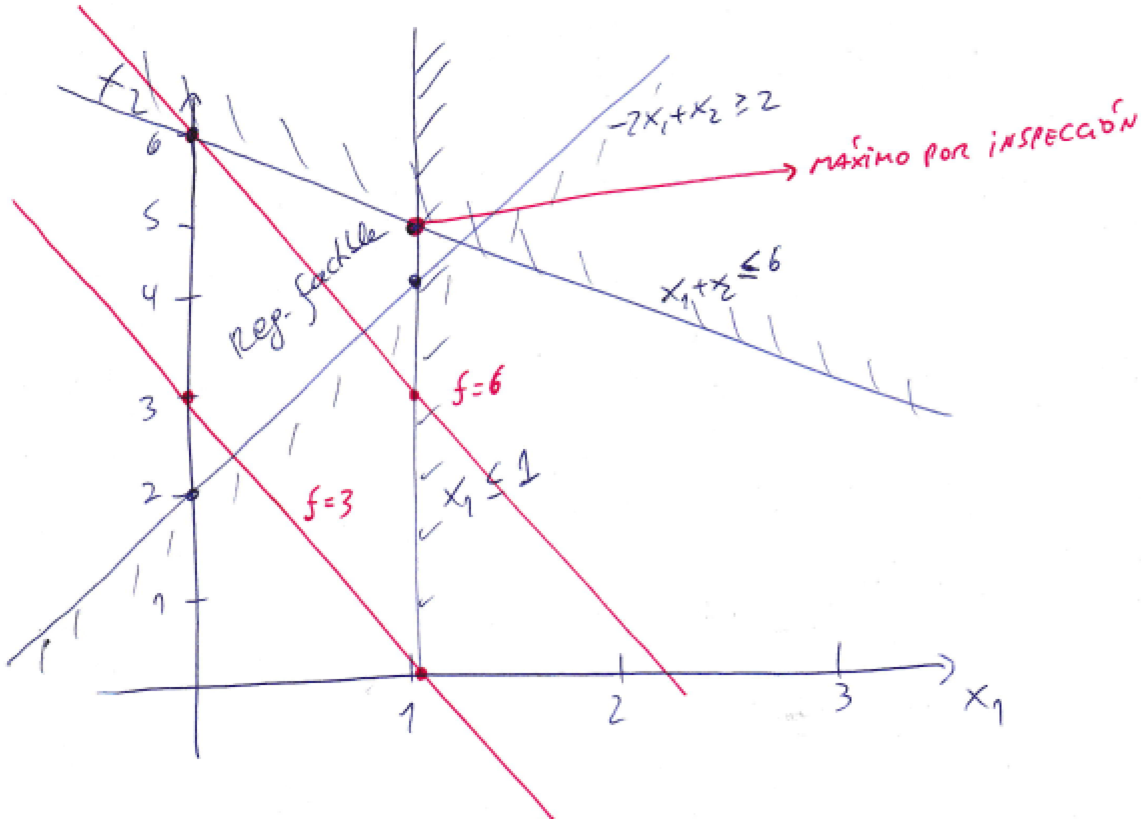
2. (1.5 ptos.) Considere el siguiente problema de programación lineal:

Maximizar $f = 3x_1 + x_2$

Sujeto a:

$$-2x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Resuelva el problema de manera gráfica.



Restricciones $\quad -2x_1 + x_2 = 2$

$x_2 = 2 + 2x_1 \quad$ sea $\quad x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = 4$

$x_1 + x_2 = 6$

$x_2 = 6 - x_1 \quad$ sea $\quad x_1 = 0 \quad x_2 = 6 \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = 5$

$x_1 \leq 1 \quad$ agregar al gráfico

Contornos de $f \qquad x_2 = f - 3x_1$

sea $\quad f = 3 \qquad x_2 = 3 - 3x_1 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = 0$

sea $\quad f = 6 \qquad x_2 = 6 - 3x_1 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 6 \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

Del gráfico, el máximo se encuentra en la intersección de las restricciones $x_1 + x_2 \leq 6$ y $x_1 \leq 1$
Entonces:

$$x_1^* = 1$$
$$x_2^* = 5$$

La función objetivo en el máximo es: $f = 3 + 5 = 8$

b) Resuelva el problema mediante el método simplex. Indique en el gráfico cada punto de iteración del algoritmo.

Hay que transformar el problema a su forma estándar. Es decir, la función debe ser de minimización y las restricciones de igualdad añadiendo variables de holgura

Minimizar $g = -3x_1 - x_2$

Sujeto a: $-2x_1 + x_2 - x_3 = 2$
$x_1 + x_2 + x_4 = 6$
$x_1 + x_5 = 1$

Dado que el sistema no está en su forma canónica, no se dispone de una solución básica factible para comenzar el algoritmo y se debe usar la fase I, que busca una solución básica factible. Se agregan las variables artificiales y se minimiza $W = y_1 + y_2 + y_3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	b
	-2	1	-1	0	0	1	0	0	2
	1	1	0	1	0	0	1	0	6
	1	0	0	0	1	0	0	1	1
$-g$	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0
$-W$	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Se eliminan las variables artificiales de la ecuación W para dejarlas como variables básicas con el sistema en forma canónica:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	b	b/a
	-2	**1**	-1	0	0	1	0	0	2	2
	1	1	0	1	0	0	1	0	6	6
	1	0	0	0	1	0	0	1	1	∞
$-g$	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	
$-W$	0	-2	1	-1	-1	0	0	0	-9	
		min dj < 0								

Dado que el menor b/a es 2 la variable básica y_1 pasa a ser no básica, mientras que x_2 pasa a las básicas. Se pivotea en el término en negrita para eliminar x_2 de toda la columna, excepto en el punto de pivoteo. Así:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	b	b/a
	-2	1	-1	0	0	1	0	0	2	
	3	0	1	1	0	-1	1	0	4	1.33
	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
$-g$	-5	0	-1	0	0	1	0	0	2	
$-W$	-4	0	-1	-1	-1	2	0	0	-5	

min dj <0

La función W disminuyó de 9 a 5.
Dado que el menor b/a es 1 la variable básica y_3 pasa a ser no básica, mientras que x_1 pasa a las básicas. Se pivotea en el término en negrita para eliminar x_1 de toda la columna, excepto en el punto de pivoteo. Así:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	b	b/a
	0	1	-1	0	2	1	0	2	4	
	0	0	**1**	1	-3	-1	1	-3	1	1
	1	0	0	0	1	0	0	1	1	∞
$-g$	0	0	-1	0	5	1	0	5	7	
$-W$	0	0	-1	-1	3	2	0	4	-1	

min dj < 0

La función W disminuyó de 5 a 1.
Hay dos dj < 0 negativos iguales, arbitrariamente se elige el de la columna de x_3.
Dado que el menor b/a es 1 la variable básica y_2 pasa a ser no básica, mientras que x_3 pasa a las básicas. Se pivotea en el término en negrita para eliminar x_3 de toda la columna, excepto en el punto de pivoteo. Así:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	b
	0	1	0	1	-1	0	1	-1	5
	0	0	1	1	-3	-1	1	-3	1
	1	0	0	0	1	0	0	1	1
$-g$	0	0	0	1	2	0	1	2	8
$-W$	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Todos los dj son positivos entonces, W es un mínimo y además es cero. Entonces, se encontró una solución básica factible. Se elimina la fila de W y las columnas de las variables artificiales.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	1	0	1	-1	5
	0	0	1	1	-3	1
	1	0	0	0	1	1
$-g$	0	0	0	1	2	8

Dado que los cj son positivos, esta solución básica factible además es la óptima.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 5$$
$$g = -8$$
$$f = 8$$

Corresponde al mismo punto determinado gráficamente.

3 (2 ptos.) Se tiene el siguiente problema de optimización no lineal:

Minimizar $f = (1.5 - x + xy)^2$

Utilice el método de Newton con la modificación de Levenberg Marquardt para resolver el problema con punto inicial (x = 0, y = -1). Efectúe 2 iteraciones y determine la curvatura de la región luego de esas dos iteraciones. ¿Es efectivo el método para esta función?

Para utilizar el método de Newton se requiere el gradiente y la Hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(1.5 - x + xy)(y - 1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(1.5 - x + xy)(x)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(1 - 2y + y^2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2(1.5 - 2x + 2xy)$$

Entonces, en el punto inicial:

$$f(x^0) = 2.25$$
$$H = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Valores propios:

$$det \begin{bmatrix} 8 - \lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix}$$
$$(8 - \lambda)(-\lambda) - 9 = 0$$
$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}$$

Valores propios: 9 y -1

Modificación de la Hessiana con $\beta = |\min \lambda| + 1 = 2$

$$\widetilde{H} = H + \beta I$$

$$\widetilde{H} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

El gradiente en el punto es:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se resuelve el sistema:

$$\widetilde{H}\text{s} = -\nabla f$$
$$\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.091 \\ -1.636 \end{bmatrix}$$

Entonces, dado que el avance de Newton es t = 1:

$$x^1 = x^0 + s = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.091 \\ -1.636 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.091 \\ -2.636 \end{bmatrix}$$

$$f(x^1) = 6.09$$

El algoritmo no está minimizando.

Segunda iteración, calcular Hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} 26.441 & -12.867 \\ -12.867 & 2.3806 \end{bmatrix}$$

Valores propios:

$$det\begin{bmatrix} 26.441 - \lambda & -12.867 \\ -12.867 & 2.3806 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - 28.8216\lambda - 102.615 = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{28.8216 \pm \sqrt{830.684 + 410.46}}{2} = \frac{28.8216 \pm 35.229}{2}$$

Valores propios: 32.02 y -3.204

Modificación de la Hessiana con $\beta = |\min \lambda| + 1 = 4.204$

$$\widetilde{H} = H + \beta I$$

$$\widetilde{H} = \begin{bmatrix} 30.645 & -12.867 \\ -12.867 & 6.5846 \end{bmatrix}$$

El gradiente en el punto es:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 17.939 \\ -5.3827 \end{bmatrix}$$

Se resuelve el sistema:

$$\widetilde{H}\text{s} = -\nabla f$$
$$\begin{bmatrix} 30.645 & -12.867 \\ -12.867 & 6.5846 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17.939 \\ 5.3827 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3478 \\ -1.8158 \end{bmatrix}$$

Entonces, dado que el avance de Newton es t = 1:

$$x^2 = x^1 + s = \begin{bmatrix} 1.091 \\ -2.636 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.3478 \\ -1.8158 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2568 \\ -4.4518 \end{bmatrix}$$

$$f(x^2) = 8.41$$

En este punto se puede calcular la Hessiana, para estudiar si efectivamente la modificación de L-M pudo sacar al método de Newton de la región indefinida:

$$H = \begin{bmatrix} 59.444 & 8.600 \\ 8.600 & 0.13189 \end{bmatrix}$$

Valores propios:

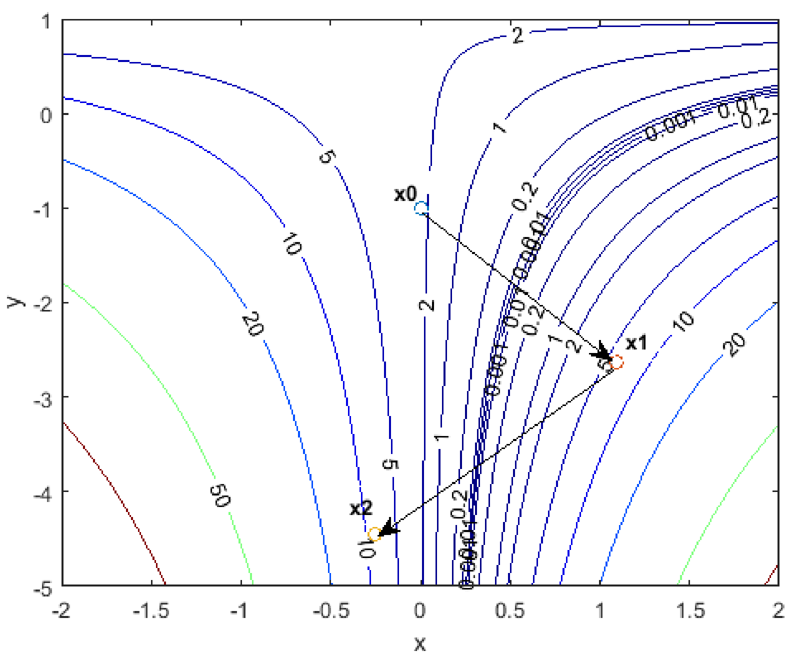
$$det \begin{bmatrix} 59.444 - \lambda & 8.6 \\ 8.6 & 0.13189 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - 59.575\lambda - 66.12 = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{59.575 \pm \sqrt{3549.2 + 264.48}}{2} = \frac{59.575 \pm 61.755}{2}$$

Valores propios: 60.67 y -1.09.
El método de Newton aún, luego de dos iteraciones, sigue estando en una zona indefinida, a pesar de usar la modificación L-M.
Se podría usar un método que no use derivadas para minimizar esta función (Ej. Nelder-Mead).
Si las minimizaciones fueran exactas o al menos aproximadas (Armijo), se podría asegurar que la función decrezca en cada iteración. De acuerdo a la figura, se observa que los avances de Newton con t = 1 son muy agresivos y no alcanzan a encontrar la zona curva donde la función tendría el mínimo.



4. (1 pto.) Se necesita determinar un modelo que permita predecir el rendimiento de un equipo que depende de dos variables: x_1 y x_2. Se efectuaron experimentos y se determinó el valor de la variable rendimiento 'y' en función de las variables de entrada.

Dato N°	**x_1**	**x_2**	**y**
1	0.1	1.2	8.10
2	0.2	1.5	12.04
3	0.3	2	16.89
4	0.5	0.1	6.47
5	0.9	0.1	7.91
6	1	0.2	8.68
7	1.2	0.4	10.52
8	1.3	0.6	12.17

Se sugiere que el modelo tiene la siguiente funcionalidad:

$$y = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2 + ex_1^2 + fx_2^2$$

Donde a, b, c, d, e y f son constantes de ajuste.

Plantee un problema de optimización que permita obtener los parámetros de ajuste del modelo. Defina la función objetivo y las variables de decisión. Indique un algoritmo de optimización adecuado para resolver el problema.

Un problema de optimización plausible para ajustar parámetros de un modelo dado un set de datos experimentales, es mínimos cuadrados.
Hay que minimizar el error cuadrático entre la variable medida y la variable calculada por el modelo:

Minimizar:

$$f = \sum_{i=1}^{8} \left[y_{exp,i} - y_{calc,i}\right]^2$$

con $y_{calc,i} = a + bx_{1,i} + cx_{2,i} + dx_{1,i}x_{2,i} + ex_{1,i}^2 + fx_{2,i}^2$

Las variables de decisión son los parámetros: a, b, c, d, e y f, o sea 6 variables.

La función objetivo es cuadrática, por lo que el método de Newton encontrará el mínimo en una iteración.
Otros algoritmos como Nelder-Mead, gradiente, Powell, etc, no deberían tener problemas para encontrar el óptimo, aunque con más iteraciones que Newton.

AKB/akb 6-6-2022