Sistemas Dinámicos Elementales

(Extraído de Revista virtual Matemática, Educación e Internet:

Adaptación: César Chavarría C)

Introducción

Se podría decir que los sistemas dinámicos son un área ``joven" de las matemáticas, aunque se remontan a Newton con sus estudios de Mecánica Celeste, y a Henri Poincaré, quien inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, fue hace apenas unos 40 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente tal, gracias al trabajo destacado de matemáticos e ingenieros como: S. Smale, V. Arnold, Lyapunov, etc.

Si tratamos de precisar el concepto de sistemas dinámicos, podríamos decir burdamente que se trata del estudio de sistemas deterministas, es decir, consideramos situaciones que dependan de algún parámetro dado, que frecuentemente suponemos es el tiempo, y que varían de acuerdo a leyes establecidas. De manera que el conocimiento de la situación en un momento dado, nos permite reconstruir el pasado y predecir el futuro.

Siendo un poco más formales, se podría decir que un sistema dinámico es un modo de describir el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos de un espacio dado S. El espacio S puede imaginarse, por ejemplo, como el espacio de estados de cierto sistema físico.

La definición matemática de un sistema corresponde a una función que tiene un dominio, recorrido y propiedades bien específicas, no es nuestra intención incursionar en ella, sin embargo en la búsqueda de la función que represente el sistema surgen expresiones que involucran derivadas (informaciones respecto o variaciones) y variables asociadas a los elementos que componen el sistema. Por lo general el software nos alivia todo el trabajo de la búsqueda de la función, él supone que el usuario tiene conocimiento de las variables del sistema (dominio) significado de sus resultados y condiciones bajo las cuales se plantea el modelo.
Los ejemplos siguientes muestran como podemos obtener la expresión matemática de un modelo. El primero un sistema discreto (La variable (t, tiempo por lo general) lo consideraremos así: cada mes, cada año, cada hora, etc. El segundo es un modelo continuo (la variable t es cualquier real en un contexto apropiado).

Ejemplo 1

Supongamos que, extrañamente, nos encontramos en una ``crisis económica" y algún banco ofrece prestarnos dinero. La tasa de interés que cobra el banco es de 2 % mensual, y nuestra capacidad de pago real es de veinte mil pesos mensuales máximo. Cuánto dinero queremos que nos preste el banco? Ingenuamente podríamos responder ``pues todo lo que se pueda", pero vamos a analizar este sencillo ejemplo un poco más. Denotemos por A_0 la cantidad de dinero que queremos pedir prestado al banco, y por A_n nuestra deuda después de n meses. Entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A_0 + 0{,}02A_0 - 20{,}000 \\
A_2 &= (1{,}02)A_1 - 20{,}000 \\
&= (1{,}02)^2A_0 - 20{,}000(1{,}02) - 20{,}000 \\
&\vdots \\
A_n &= (1{,}02)^nA_0 - 20{,}000(1{,}02^{n-1} + \cdots + 1{,}02 + 1).
\end{aligned}
$$

Observemos que si A_0, el préstamo inicial, es de un millón de pesos, entonces

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (1{,}02)\cdot 1{,}000{,}000 - 20{,}000 = A_0 \\
A_2 &= (1{,}02)^2\cdot 1{,}000{,}000 - 20{,}000 = A_0
\end{aligned}
$$

etc., es decir que $A_0 = \$1{,}000{,}000$ es un punto fijo, o un punto de equilibrio, del sistema dinámico en cuestión. Podemos entonces concluir:

- Si el banco nos presta menos de un millón, algún día terminaremos de pagarle.
- Si el banco nos presta más de un millón, algún día tendremos que venderle el alma al diablo, o hacer algo para poder pagar.
- Si el banco nos presta exactamente un millón, simplemente le pagaremos 20 mil pesos mensuales de interés por el resto de nuestra vida.

Así que conocer las leyes que rigen el sistema, nos permite predecir el futuro. Ustedes tienen la palabra, cuánto quieren que les preste el banco?

Expresiones del tipo presentado, donde tenemos una sucesión de valores $\{A_n\}$, n un entero, tales que el valor de A_n está determinado por los valores anteriores A_{n-1}, A_{n-2}, etc., se llaman ecuaciones en diferencias, y dan ejemplos de sistemas dinámicos discretos, donde la palabra discreto significa que el parámetro ``tiempo'' lo consideraremos así: cada mes, cada año, cada hora, etc. Las ecuaciones en diferencias, o sistemas dinámicos discretos, más ``sencillos'' y tal vez más importantes, surgen mediante la iteración de funciones.

Ejemplo 2

Se sabe que ciertas especies animales se multiplican, en condiciones ideales(comida en abundancia, sin luchas internas, etc.), de manera tal que el crecimiento de la población es proporcional a la cantidad de miembros de la especie. Es decir que si $P(t)$ denota la población en el tiempo t, y $P'(t)$ es la velocidad con que varía la población, entonces existe una constante $a > 0$, tal que

$$P'(t) \;=\; a\,P(t), \tag{1}$$

para todo $t > 0$, donde 0 denota el tiempo a partir del cual comenzamos a hacer nuestra observación, y la constante a depende de la población en cuestión y del medio ambiente. Esta ecuación es el ejemplo más sencillo e importante de lo que es una ecuación diferencial. Es fácil ver que cualquier función que satisface la ecuación diferencial (1) necesariamente es de la forma

$$Y(t) \;=\; Ke^{at}, \tag{2}$$

donde K es una constante, determinada por la ``condición inicial''. En nuestro caso K es la población inicial en $t = 0$. La ley de crecimiento de la población dada por la ecuación (1) se conoce como la Ley Malthusiana de crecimiento, y la ecuación (2) nos dice que si la especie en cuestión se rige por esta ley de crecimiento, entonces, independientemente de la población inicial, si $P(0) > 0$, la población tenderá a infinito exponencialmente. La experiencia nos enseña que esto no sucede en la realidad por tiempo prolongado, así que debe haber otros factores a considerar. Una vez que la población sobrepasa un cierto número, comienza a haber escasez de alimentos, se producen luchas internas, desechos contaminantes, etc. Esto nos lleva a considerar la ``Ley logística'' de crecimiento de poblaciones:

$$P'(t) \;=\; aP(t) \;-\; bP^2(t),$$

donde a y b son constantes positivas y a es mucho mayor que b. Las constantes a y b son los *coeficientes vitales* de la especie. Obsérvese que si la población $P(t)$ es ``pequeña'' , el término $b^2P(t)$ es despreciable, pues b es muy pequeña en relación a a., por lo que el crecimiento asemeja al regido por la ley malthusiana. Sin embargo, al aumentar $P(t)$ la contribución bP^2 crece en forma cuadrática, por lo que juega un papel importante.

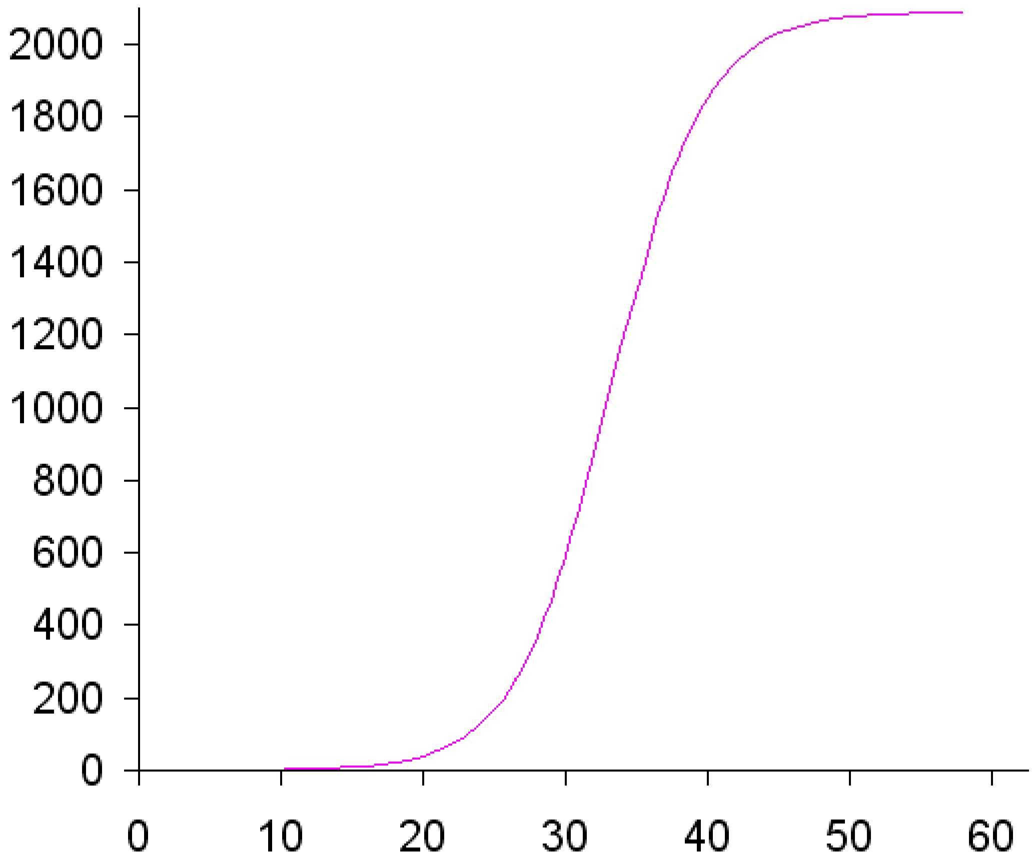
Esta ecuación diferencial es de primer orden, del tipo ``separable'' y por tanto es fácil de resolver; si $P(0)$ es la población inicial en $t = 0$, entonces (por el teorema de existencia y unicidad de soluciones con condiciones iniciales) existe una única función de t que satisface la ecuación diferencial y toma el valor $P(0)$ en $t = 0$. La solución buscada es

$$P(t) = \frac{aP(0)}{bP(0) + (a - P(0))e^{-at}} .$$

Si hacemos $L = a/b$, observamos que $P(t)$ tiende a L cuando t tiende a ∞, independientemente de la población inicial, pues e^{-at} tiende a 0 cuando t tiende a ∞. Además, $P(t)$ es una función monótona creciente para $t > 0$. Más aún, dado que

$$P''(t) = aP'(t) - 2bP(t) \cdot P'(t),$$

se ve que P' es creciente para $P(t) < L/2$ y es decreciente para $P(t) > L/2$, con un punto de inflexión en $P(t) = L/2$. Por tanto la gráfica de P es del tipo:



Gráfica de P(t)= $2090/(1+14999 \cdot 10^{-0.13 \cdot t})$

A partir de esta información concluimos que el período de tiempo antes de que la población alcance la mitad de su límite L, es un período de crecimiento acelerado, semejante al crecimiento regido por la ley malthusiana. Después de este punto, la tasa de crecimiento disminuye hasta llegar a cero.

De esta forma la ley logística nos permite hacer predicciones sobre el crecimiento de las especies, predicciones que se han comprobado en diversos estudios y experimentos.

Obsérvese que la ley logística

$$P'(t) \;=\; aP(t) \;-\; bP^2(t),$$

puede escribirse en la forma

$$P'(t) \;=\; aP(t)\left(\frac{L-P(t)}{L}\right),$$

donde $L = a/b$ es el límite de la población. El término $aP(t)$ es el potencial biótico de la especie, es decir, la tasa potencial de crecimiento en condiciones ideales, y el término $(L - P/L)$ es la resistencia ambiental al crecimiento.